Hoja 2: integrales de funciones lineales a trozos

1 Recorrido principal

1.1 Gráficos e integrales

Ejercicio 1 Sea f la función cuyo gráfico se representa en la figura 1.

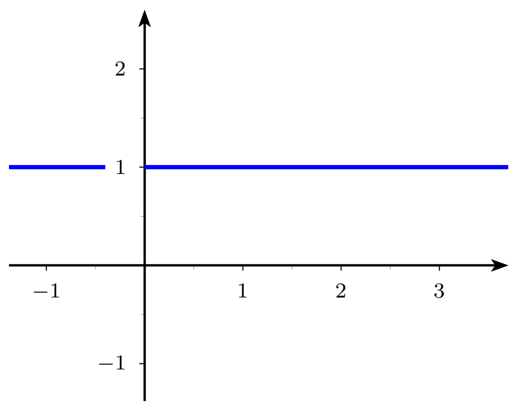


Figura 1

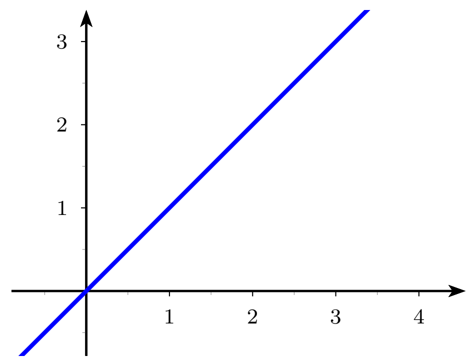
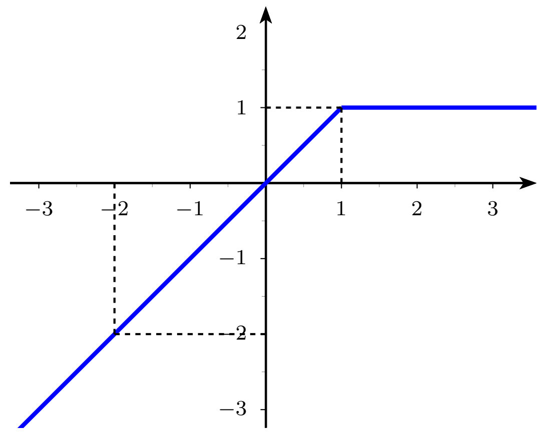


Figura 2

1. Para cada valor de $x \in \mathbb{R}$, calcular
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$
2. Graficar $F(x)$.
3. Mostrar que para cualquier valor de las constantes a y b se satisfacen las igualdades
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$
Interpretar geométricamente este resultado.
4. Calcular la pendiente del gráfico de F. ¿Cómo se relaciona esta pendiente con la función f?
5. Repetir las partes 1 a 3 para la función que se representa en la figura 2. ¿Qué nueva situación se encuentra ahora cuando se intenta considerar para esta función la pregunta que se plantea en la parte 4? ¿Qué ocurre cuando se intenta determinar **la** pendiente del gráfico de F?

Ejercicio 2 Para la función f cuyo gráfico se representa en la figura,



calcular la integral

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx.$$

Ejercicio 3 Repetir el ejercicio 1 para cada una de las funciones cuyos gráficos se representan en la figuras 1 y 2. Prestar atención a las distintas situaciones que se presentan al estudiar las pendientes de la función F.

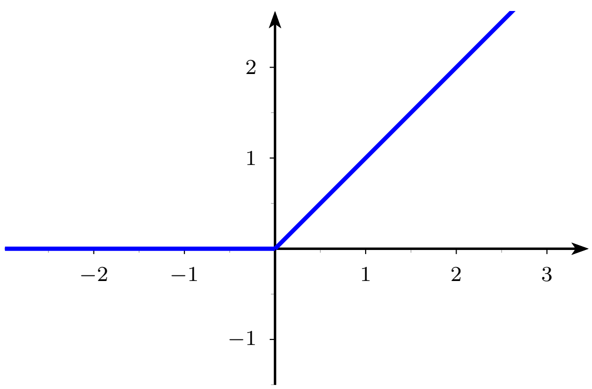


Figura 1

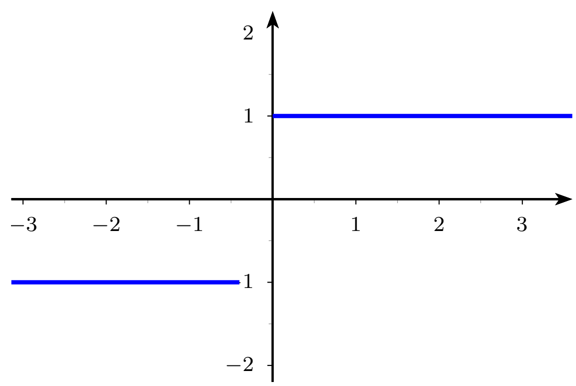
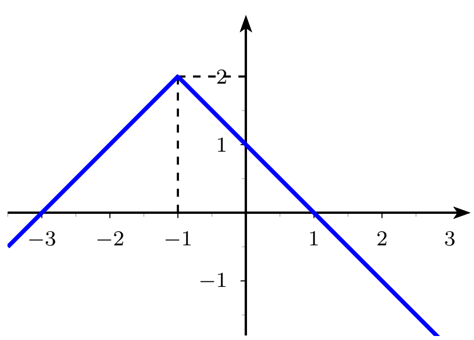


Figura 2

Ejercicio 4

Para la función f cuyo gráfico se representa en la figura 1:



1. Calcular

$$\int_{-2}^{-1} f(t)\, dt, \qquad \int_{-2}^{0} f(t)\, dt, \int_{-2}^{2} f(t)\, dt.$$

2. Definimos
$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\, dt.$$
Calcular
$$F(2), \quad F(0), \quad F(-1), \quad F(-2).$$
3. Para $x \leq -1$, calcular $F(x)$.
4. Para $x \geq -1$, calcular $F(x)$.
5. La función F, ¿es continua en $x = -1$?
6. Hallar todos los valores de x en que $F(x)$ se anula.

Ejercicio 5 Sea f la función cuyo gráfico aparece en la figura.

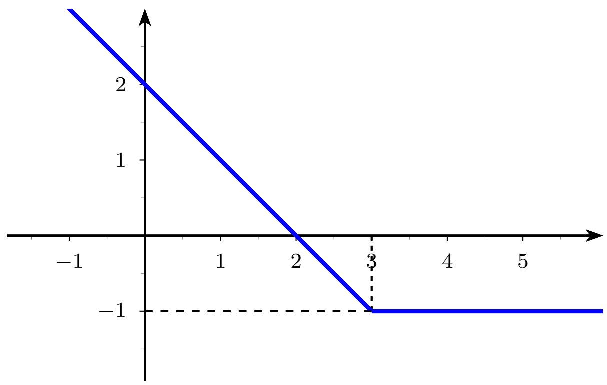


Figura 14

Hallar el valor mínimo m y el valor máximo M que la función
$$F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, dt$$
toma en el intervalo $[-1, 9]$.

1.2 Fórmulas e integrales

Ejercicio 6

1. Graficar $f(x) = 1$.
2. Para cada valor de $x \in \mathbb{R}$, calcular
$$F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, dt.$$
3. Graficar $F(x)$.
4. Mostrar que para cualquier valor de las constantes a y b se satisfacen las igualdades
$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$
Interpretar geométricamente este resultado.

5. Calcular la pendiente del gráfico de F. ¿Cómo se relaciona esta pendiente con la función f?

6. Repetir las partes 1 a 4 para la función $f(x) = x$. ¿Qué nueva situación se encuentra ahora cuando se intenta considerar para esta función la pregunta que se plantea en la parte 4? ¿Qué ocurre cuando se intenta determinar **la** pendiente del gráfico de F?

Ejercicio 7

1. Para $x \in [0, 4]$, calcular la función
$$F(x) = 10 + \int_0^x (-5)dt.$$
Dibujar el gráfico de F sobre el intervalo $[0, 4]$.

2. Una barra recta de 4 m de longitud apoyada en sus extremos soporta una carga distribuida de 5 daN/m. Está equilibrada por reacciones verticales de 10 daN en cada uno de sus dos apoyos. Calcular el cortante en cada punto x de la barra, donde x indica la distancia en metros a su extremo izquierdo. Graficar el cortante.

3. La trayectoria de un móvil que se desplaza sobre una línea recta se describe por medio de una coordenada p que indica su posición relativa a un cierto origen O desde el que se mide p. El valor de p es positivo cuando el móvil está a la derecha del origen, y negativo cuando está a la izquierda. Si el movil parte de una posición inicial $p(0) = 10$ m y retrocede durante 4 segundos con una velocidad de -5 m/s (las velocidades son negativas cuando retrocede y positivas cuando avanza), hallar la función $p(t)$ que describe la posición p en función del tiempo t para $t \in [0, 4]$. Graficar p sobre este intervalo.

4. Comparar entre sí las tres partes anteriores de este ejercicio.

Ejercicio 8

1. Para $x \in [0, 10]$, calcular la función
$$F(x) = \int_0^x 3t\,dt.$$
Dibujar el gráfico de F sobre el intervalo $[0, 10]$.

2. Una barra recta de 10 m de longitud está empotrada en su extremo de la derecha y recibe desde abajo una presión que va creciendo linealmente a medida que nos alejamos del extremo de la barra, de un modo tal que la pieza queda sometida a un esfuezo distribuido de $3x$ daN/m, que la empuja hacia arriba (la situación es irreal como problema de cálculo de estructuras, pero nos ayudará a ilustrar el punto que pretendemos mostrar con estos ejemplos) . Calcular el cortante en cada punto x de la barra, donde x indica la distancia en metros a su extremo izquierdo. Graficar el cortante. ¿Cuál tiene que ser la reacción vertical del empotramiento, para equilibrar la carga de la barra?

3. Un móvil parte del reposo en una posición inicial $p(0) = 0$ m y durante 10 segundos avanza acelerándose de manera constante, de modo que en el instante t su velocidad es de $3t$ m/s. Hallar la función $p(t)$ que describe la posición p en función del tiempo t para $t \in [0, 10]$. Averiguar a que distancia está del origen cuando $t = 10$.

4. Comparar entre sí las tres partes anteriores de este ejercicio.

Ejercicio 9 Para las funciones f y g del ejercicio 40, calcular las funciones

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt; \quad G(x) = \int_0^x g(t)\,dt,$$

y graficarlas.

Ejercicio 10 Calcular la integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} |1-x|\,dx.$$

Respuesta:

1. $-\dfrac{15}{8}$.
2. $\dfrac{15}{8}$.
3. $\dfrac{17}{8}$.
4. $\dfrac{55}{8}$.

Ejercicio 11

1. Graficar la función
$$f(t) = 2 - |t+1|.$$
En particular, identificar los puntos en que se anula, las regiones en que es positiva y en que es negativa.
2. Definimos
$$F(x) = \int_{-2}^{x} (2 - |t+1|)\ dt.$$
3. Hallar para cada $x \in \mathbb{R}$ una expresión que permita calcular $F(x)$.
4. Identificar cuál es el punto de $[0, +\infty)$ en que F alcanza su valor máximo. Calcular ese valor, por dos procedimientos:
   (a) interpretando los valores de F como áreas signadas e identificando cuál es el área que hay que calcular para resolver estar parte del ejercicio;
   (b) evaluando la integral en el valor de x adecuado, usando el resultado de la parte 3.

La *parte positiva* x_+ y la *parte negativa* x_- de cada número real x están definidas por las fórmulas

$$x_+ = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0; \end{cases} \qquad x_- = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0; \\ 0, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Prestar especial atención al hecho de que la parte negativa de un número es siempre mayor o igual que 0.

Ejercicio 12 Repetir el ejercicio 6 para las funciones f y g definidas por $f(x) = x_+$ y $g(x) = x_-$.

Ejercicio 13 Hallar el valor mínimo m y el valor máximo M que la función

$$F(x) = \int_0^x ((t-3)_- - 1)\, dt$$

toma en el intervalo $[-1, 9]$.

La función signo, que indicaremos con el símbolo sgn, está definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ejercicio 14 Repetir las partes 1 a 4 del ejercicio 6 para la función sgn. La función F que se obtiene ahora, ¿es continua o discontinua en $x = 0$? ¿Y la función sgn? ¿De qué manera se refleja en la función F el comportamiento de sgn cerca de $x = 0$? ¿Qué nueva situación se encuentra ahora cuando se considerara la pendiente del gráfico de F?

2 Extensiones y profundizaciones

En esta sección hemos colocado ejercicios que

- abren alguna conexión hacia otros temas del curso que no son los objetivos centrales de esta semana de trabajo y que reaparecerán más tarde con mayor énfasis;
- implican cierto nivel de profundización en algún tema vinculado a los objetivos del curso, que apuntan hacia niveles muy buenos o excelentes de desempeño.

Ejercicio 15

Sea f la función cuyo gráfico se representa en la figura 1. Aunque el dibujo representa un caso en que c es positivo, la letra c indica una constante cualquiera. Discutir los resultados del ejercicio según que c sea mayor, igual o menor que 0.

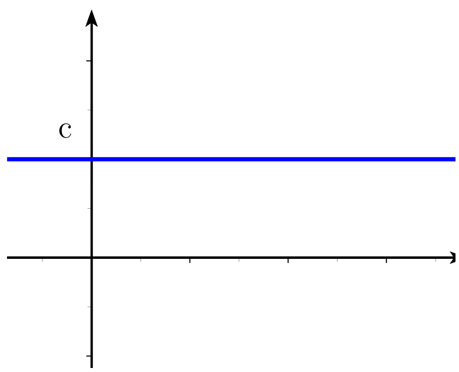


Figura 1

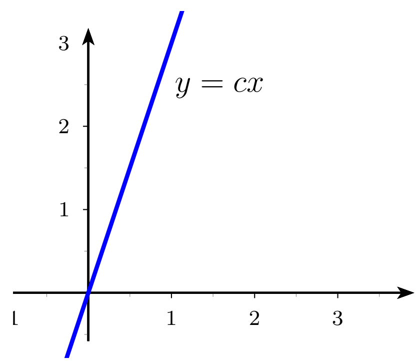


Figura 2

1. Para cada valor de $x \in \mathbb{R}$, calcular
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$
2. Graficar $F(x)$.
3. Para un valor $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, calcular, para cada valor de $x \in \mathbb{R}$,
$$G(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$
4. Graficar $G(x)$.
5. Calcular la diferencia $G - F$ entre las funciones G y F. Interpretarla en términos del gráfico de la función f de la parte 15.
6. Mostrar que para cualquier valor de las constantes a y b se satisfacen las igualdades
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$
Interpretar geométricamente este resultado.

7. Calcular la pendiente de los gráficos de F y G. ¿Cómo se relaciona esta pendiente con la función f de la parte 15?

8. ¿Qué nueva situación se encuentra ahora cuando se intenta considerar para esta función la pregunta que se plantea en la parte 7? ¿Qué ocurre cuando se intenta determinar **la** pendiente del gráfico de F o de G?

Ejercicio 16 La función f que queda definida por las fórmulas

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

puede expresarse en la forma

$$f(x) = a(x-1)_- + b,$$

para una elección adecuada de a y b. Determinar cuáles son esos valores de a y b.

Ejercicio 17

1. Mostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se satisface

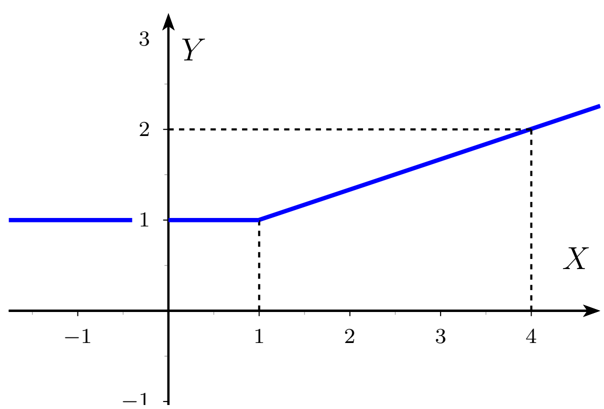
$$x = x_+ - x_-, \qquad |x| = x_+ + x_-.$$

2. ¿Cuáles son las expresiones de x_+ y x_- en términos de x y $|x|$?

3. Relacionar los resultados de las partes anteriores los gráficos de las funciones identidad, valor absoluto, parte positiva y parte negativa.

Ejercicio 18

1. Dar dos expresiones analíticas para la función que corresponde al siguiente gráfico:



   (a) la primera de ellas de la forma

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & x \leq x_0, \\ cx+d, & x \geq x_0, \end{cases}$$

   para valores adecuados de las constantes a, b, c, d y x_0 que se determinarán.

   (b) la segunda en forma concisa, usando algunas de las funciones valor absoluto, parte positiva o parte negativa.

2. Dibujar el gráfico de la función F definida por

$$F(x) = \int_2^x f(t)\, dt.$$

3. Calcular $F(0)$ e identificar los puntos del gráfico de F que caen sobre el eje Ox.

4. Hallar fórmulas explícitas, en función de x, que permitan calcular directamente $F(x)$. Verificar que las fórmula predicen los resultados hallados en la parte anterior.

Ejercicio 19 ¿Qué función resulta cuando para cada $x \in \mathbb{R}$ se forma el producto de x con $\operatorname{sgn}(x)$? ¿Es cierto que si el producto de dos funciones es continua, entonces cada una de ellas debe serlo? Si el resultado es cierto dar un argumento que lo justifique. Si es falso, dar dos ejemplos que muestren su invalidez.

3 Ejercicios de entrenamiento

En esta sección hemos colocado ejercicios de temas centrales del curso con un nivel de dificultad asociado a un nivel de desempeño bueno. Es material que permite tener una práctica adicional, recomendable cuando algún estudiante la considere necesaria para asimilar algún concepto que requiere especial atención, o en momentos de preparación para las pruebas.

Ejercicio 20 1. Repetir el ejercicio 1 para cada una de las funciones cuyos gráficos se representan en la figuras 1 y 2. Prestar atención a las distintas situaciones que se presentan al estudiar las pendientes de la función F.

2. Una vez hecha la parte anterior, repetir las partes 3 a 5 del ejercicio 15.

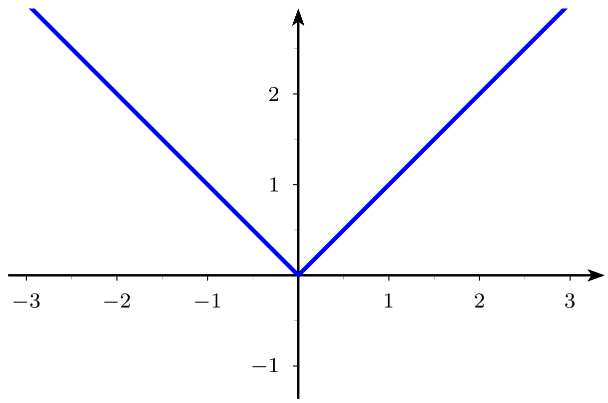


Figura 1

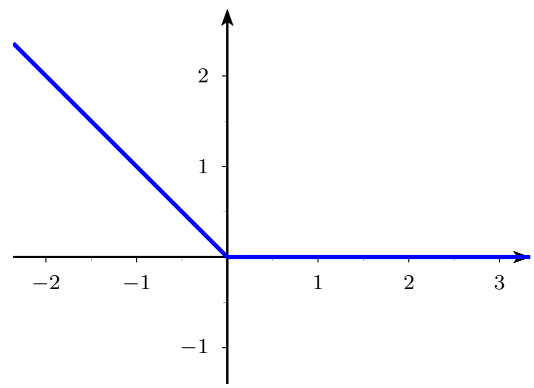


Figura 2

Ejercicio 21 Para la función que se representa en la figura 10,

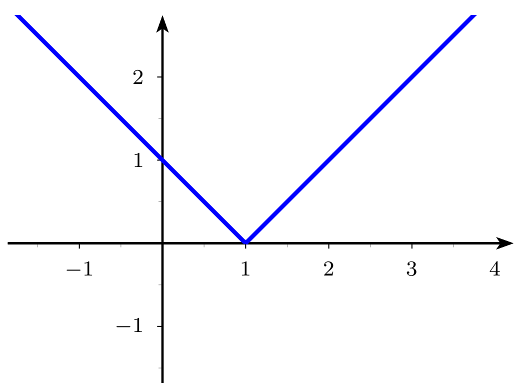


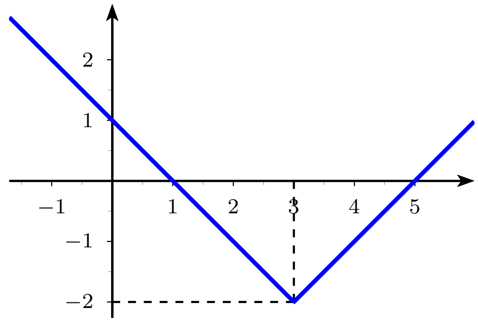
Figura 10

calcular la integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} f(x)\,dx.$$

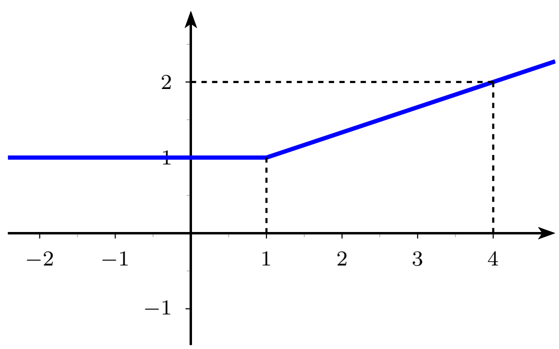
Ejercicio 22 Para la función cuyo gráfico aparece en la figura se define

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$



1. Calcular $F(1)$;
2. Ubicar el punto $(1, F(1))$ en el plano (x, y);
3. Repetir la parte anterior para los puntos $(x, F(x))$, $x = -1, 0, 2, 3, 4$;
4. Repetir para $x = -1/2, 1/2, 3/2$.
5. Esbozar el gráfico de $F(x)$.
6. Dar una expresión analítica para $F(x)$ y contrastar con el resultado de la parte anterior.
7. ¿Qué relación hay entre el crecimiento de F y los valores de f? ¿En qué regiones crece F y en qué regiones decrece? ¿En qué regiones crece más rápido?

Ejercicio 23 Sea f la función cuyo gráfico aparece representado en la figura.



1. Dibujar el gráfico de la función F definida por

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,dt.$$

2. Calcular $F(0)$ e identificar los puntos del gráfico de F que caen sobre el eje Ox.
3. Hallar fórmulas explícitas, en función de x, que permitan calcular directamente $F(x)$. Verificar que las fórmulas predicen los resultados hallados en la parte anterior.

Ejercicio 24 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1; \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Graficar f.

2. La integral
$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx,$$
toma el valor
   (A) $-\dfrac{1}{2}$;
   (B) 0
   (C) $\dfrac{1}{2}$;
   (D) $\dfrac{7}{2}$;

Ejercicio 25 Repetir el ejercicio 6 para la función valor absoluto
$$f(x) = |x|.$$

Ejercicio 26 Calcular $\displaystyle\int_{0}^{3} |\pi x - e|\, dx$.

Ejercicio 27 Para las funciones
$$f(x) = |x-3| - 2, \quad F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt.$$

1. Calcular $F(-1)$, $F(1)$ y $F(3/2)$;
2. Esbozar el gráfico de $F(x)$.
3. Dar una expresión analítica para $F(x)$ y contrastar con el resultado de la parte anterior.
4. ¿Qué relación hay entre el crecimiento de F y los valores de f? ¿En qué regiones crece F y en qué regiones decrece? ¿En qué regiones crece más rápido?

Ejercicio 28 Se considera la función F definida por
$$F(x) = \int_{-3}^{x} \left(|2t+4| - 4\right)\, dt.$$

1. Hallar el valor máximo y el valor mínimo que toma F en el intervalo $[-5, 3]$.
2. Hallar todos los valores de x para los que $F(x) = 0$.

Ejercicio 29 Para $x \in \mathbb{R}$ definimos las funciones
$$f(x) = -|x+1| + \frac{x}{2} + \frac{3}{2}, \quad F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\, dt.$$
Calcular $F(-3)$, $F(1)$. Determinar los puntos donde F se anula. Hallar los valores mínimo y máximo de F en el intervalo $[-2, 4]$ y los puntos en que se alcanzan. Graficar F.

A Requisitos previos

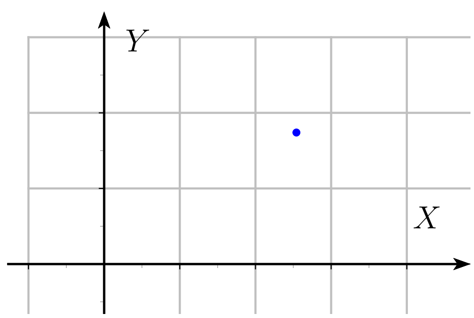
Este apéndice recorre actividades acerca de coordenadas en el plano y gráficos de funciones. Son conceptos que los estudiantes deberían manejar con cierta solvencia al comenzar el curso. Esta selección permite explicitar álgunos prerrequisitos necesarios y dar oportunidad de revisar estos contenidos o de completar conocimientos previos, dependiendo de cuál sea la situación de cada estudiante.

A.1 Revisión de puntos y coordenadas en el plano

Ejercicio 30

1. Ubicar en el plano (x, y) los puntos $(0, 0)$, $(-1, 3)$ y $(1/2, 4/3)$.
2. Identificar sobre el mismo plano todos los puntos (x, y) que satisfacen la condición $x = -1$. Decidir cuál de los puntos dibujados antes la satisface.
3. Identificar sobre el mismo plano todos los puntos (x, y) que satisfacen la condición $x = y$. Decidir cuál de los puntos dibujados antes la satisfacen.
4. Hallar el punto que satisface $x = -1$ y $x = y$. Ubicarlo en el plano (x, y).

Ejercicio 31 En la figura se representa un cierto punto (x_0, y_0) del plano (x, y).



1. Ubicar dónde deben representarse en el dibujo los puntos $(x_0, 0)$, $(0, y_0)$, $(2x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, (y_0, x_0), $(-y_0, x_0)$, $(-x_0, -y_0)$, $(x_0 + 1, y)$.
2. Discutir según el valor de $a \in \mathbb{R}$ la posicion de $(x_0 + a, y_0)$, de (x_0, ay_0) y de (ax_0, ay_0).
3. Identificar y dibujar los distintos conjuntos de puntos (x, y) del plano que satisfacen las igualdades

   (a) $x = x_0$;

   (b) $y = y_0$;

   (c) $x = y_0$;

   (d) $y = \dfrac{y_0}{x_0} x$;

   (e) $y = \dfrac{y_0}{x_0} x + 1$;

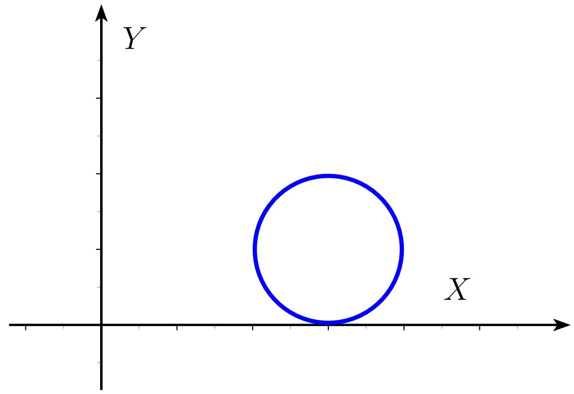
   (f) $y = 2\dfrac{y_0}{x_0} x$;

   (g) $y = 2\dfrac{y_0}{x_0} x + 1$;

(h) $x + y = x_0 + y_0$;

(i) $xy = x_0 y_0$;

Ejercicio 32 En la figura se representa una circunferencia del plano (x, y).



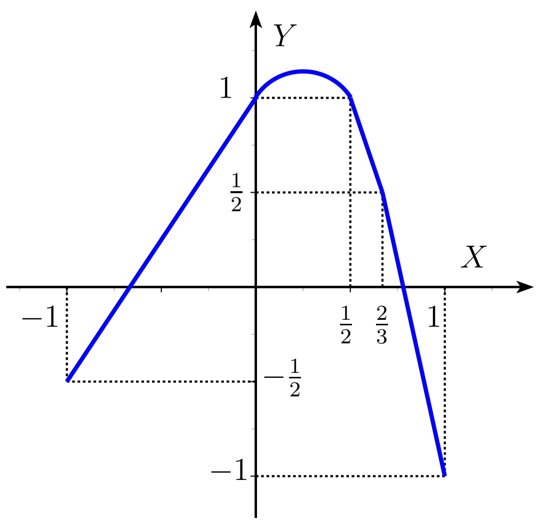
Dibujar la figura en la que se transforma la circunferencia como resultado de aplicar a todos sus puntos cada una de las transformaciones que se detallan a continuación

1. $(x, y) \mapsto (x, 0)$;
2. $(x, y) \mapsto (2x, y)$;
3. $(x, y) \mapsto (x, -y)$;
4. $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$.

A.2 Gráficos de funciones

Ejercicio 33 ¿Si sabemos que $f(-3) = 4$, qué punto del gráfico de f podemos representar?

Ejercicio 34 A partir del gráfico de la figura, determinar $f(-1)$ y $f(1/2)$.



Ejercicio 35 Se sabe que la función f es estrictamente creciente. Si $f(1) = 2$, dibujar el conjunto de puntos de plano (x, y) que podrían representar el punto del gráfico de f que corresponde a $f(3)$. Para cada uno de esos puntos, dar una ejemplo de una función f estrictamente creciente que tenga a ese punto en su gráfico.

Ejercicio 36 La función de Dirichlet d se define para todo $x \in \mathbb{R}$ como

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Las letras $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ designan, respectivamente, al conjunto de los números racionales y al conjunto de los números racionales. Representar algunos puntos del gráfico de d. ¿Qué ocurre cuando en un intervalo cualquiera, por ejemplo el $(0,1)$, se intenta representar a **todos** los puntos del gráfico de d?

Ejercicio 37 Cualquier número real diferente de 0 tiene una única expresión decimal infinita, por lo que podemos definir una función f de la siguiente manera:

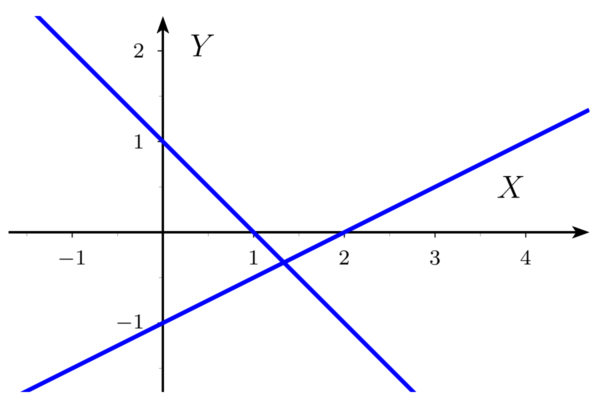
- para cualquier número $x \neq 0$, $f(x)$ es igual al tercer dígito después de la coma en la expresión decimal infinita de x;
- f(0)=0.

1. Ubicar en el plano (x, y) los puntos del gráfico de f que corresponden a $x=-1$, $x=0$, $x=3/4$, $x=4/3$, $x=\sqrt{2}$, $x=2$, $x=e$ y $x=\pi$.
2. Esbozar el gráfico de f.

Ejercicio 38 En este ejercicio consideraremos la función lineal $f(x)=ax+b$ tal que los dos puntos $(4,7)$ y $(-1,1)$ pertenecen a su gráfico.

1. Dibujar en el plano el gráfico de f.
2. Hallar a y b.
3. Hallar el valor de la función en 0 y comprobar que el punto que corresponde al gráfico efectivamente cae sobre la línea que une $(4,7)$ con $(-1,1)$.
4. Hallar el incremento Δf de f entre $x=-1$ y $x=4$ y el incremento entre $x=-1$ y $x=0$. Comparar ambos incrementos. Interpretar gráficamente.
5. Hallar los cocientes incrementales $\Delta f/\Delta x$ para f entre $x=-1$ y $x=4$, y entre $x=-1$ y $x=0$. Comparar ambos números. Interpretar gráficamente.

Ejercicio 39 Dadas las dos gráficas que se representan en la figura,



identificar a qué funciones lineales corresponden. Hallar las coordenadas del punto de corte de los dos gráficos.

Ejercicio 40 Graficar las funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ por las fórmulas

$$f(x)=\begin{cases} x/2-3, & x<4, \\ x-5, & x\geq 4, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 0, & x<4, \\ x, & x\geq 4. \end{cases}$$

Ejercicio 41

1. Ubicar los puntos del gráfico de $f(x) = x^2$ que corresponden a $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ y $x = 2$.

2. Esbozar el gráfico de la función.

3. Hallar el incremento Δf de la función entre parejas de puntos consecutivos de los cinco listados.

4. Para cada una de las mismas parejas de la parte anterior, hallar el cociente incremental $\Delta f / \Delta x$. Hallar la pendiente media entre $x = -1$ y $x = 1$.