Hoja 3: Aproximaciones a la integral

Definir la integral como el área bajo un gráfico nos enfrenta al problema de calcular áreas de diversos conjuntos del plano. En esta sección vamos a tratar de discutir un método bastante general para hacerlo. Consideraremos primero ejemplos muy simples, siempre sobre el mismo intervalo $[0, 1]$. Luego generalizaremos los métodos para funciones cualesquiera en intervalos cualesquiera.

1 Recorrido principal

1.1 Primeras aproximaciones a la integral de una función cuadrática

Abordaremos el cálculo de

$$\int_0^1 x^2 dx. \qquad (1)$$

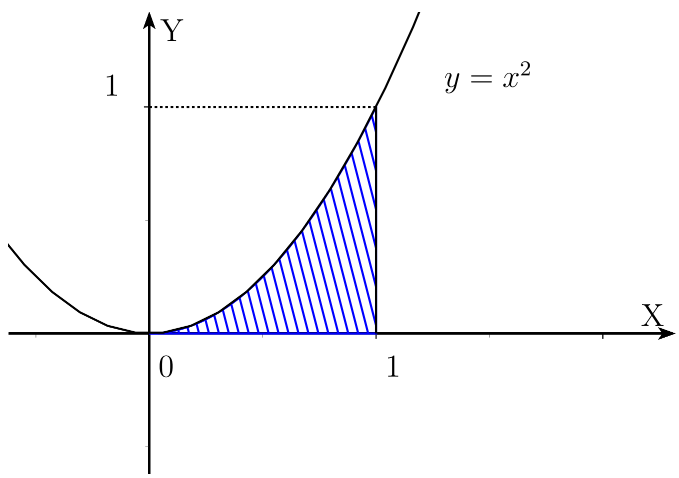


Figura 1

Aunque nos concentraremos en este ejemplo, los métodos que emplearemos no dependen de que el integrando sea x^2 ni de que el intervalo de trabajo sea $[0, 1]$. Son generales y permitirán extender el cálculo integral a funciones cualesquiera, proporcionando un procedimiento para tratar cualquier integral de la forma

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Observación 1.0.1 Estimaciones de la integral por encima y por debajo. Es evidente que

$$\int_0^1 x^2 dx \geq 0, \qquad (2)$$

porque en el intervalo $[0,1]$ la función x^2 es siempre mayor o igual que cero y su gráfico está por encima del eje Ox. Nuestra definición de la integral como área signada implica directamente la desigualdad (2), porque no hay que considerar ninguna región bajo el eje Ox que pueda aportar al cálculo un sumando negativo.

Hay una estimación superior del valor de la integral, que está implícita en la figura 2.

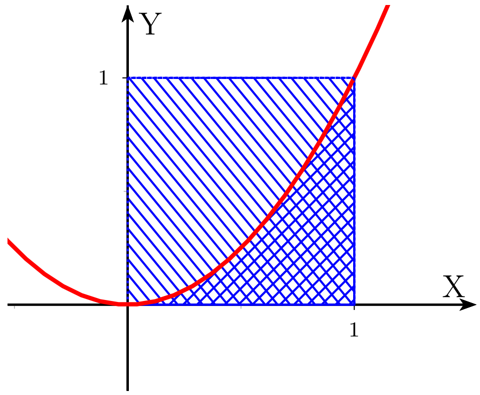


Figura 2. Primera aproximación por exceso.

Luego de haber examinado la figura 2, seguramente el lector esté de acuerdo en que

$$\int_0^1 x^2\,dx \leq 1.$$

Esta estimación se obtiene comparando la región cuya área queremos estimar con la del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ que la contiene.

Observación 1.0.2 Intentos de aproximación de la integral. En la observación 1.0.1 encontramos un valor que necesariamente está por debajo y otro que necesariamente está por encima, tomando rectángulos cuyas alturas son, respectivamente, el valor mínimo y el valor máximo que toma la función en el intervalo $[0,1]$. Estos valores son 0 y 1.

- El valor 0 da lugar a un "rectángulo" de base 1 y altura 0 que está completamente contenido en la región comprendida bajo el gráfico de x^2. Esta figura en realidad se reduce a un segmento de recta de área nula.
- El valor 1 da lugar a un rectángulo de base 1 y altura 1 que contiene completamente la región comprendida bajo el gráfico de x^2. Este rectángulo es además un cuadrado, y tiene área 1.

De algún modo nos hemos puesto en los casos extremos para la evaluación de las áreas.

Una alternativa es tratar de aproximarse mejor, refinando la comparación con rectángulos y escogiéndolos de modo que se vayan adaptando mejor a la región del plano cuya área queremos calcular. Una manera de hacerlo es dividir el intervalo $[0,1]$ en dos subintervalos iguales $[0,1/2]$ y $[1/2,1]$, y usar estos subintervalos en la construcción de rectángulos que nos permitan aproximar el área por defecto y con exceso.

Para construir una aproximación por defecto, usamos $[0,1/2]$ y $[1/2,1]$ como bases de los rectángulos más altos que podamos construir por debajo del gráfico de x^2, tal como se muestra en la figura 3. Como en $x=0$ la función x^2 toma el valor 0, el primer rectángulo degenera en un segmento de área nula.

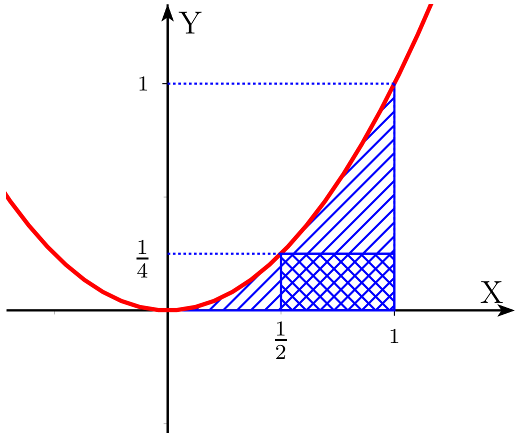


Figura 3. Primera aproximación por defecto.

El segundo rectágulo tiene altura

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

y base $1/2$. De modo que el área total encerrada en los dos rectángulos es

$$0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8},$$

de modo que concluimos

$$\frac{1}{8} \leq \int_0^1 x^2\, dx.$$

Una estimación superior para la integral puede obtenerse a partir de dos rectángulos cuya unión contenga completamente la región encerrada bajo el gráfico de x^2 sobre $[0,1]$, tal como se muestra en la figura 4.

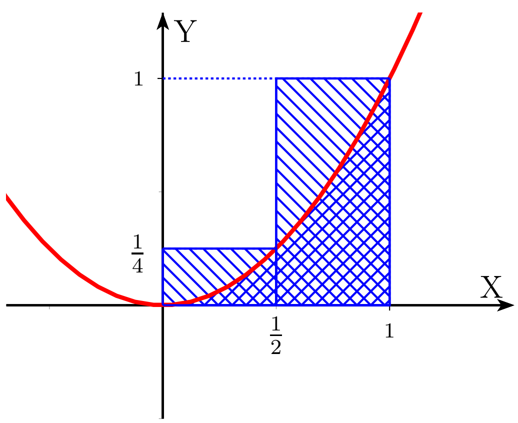


Figura 4. Segunda aproximación por exceso.

Haciendo para cada uno de ellos la conocida cuenta base $\times$ altura y sumando, obtenemos que

$$\left(\frac{1}{2} - 0\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 1^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

es una estimación por exceso de la integral.

Uniendo lo que aprendimos al estimar por exceso y por defecto, tenemos que

$$\frac{1}{8} \leq \int_0^1 x^2\, dx \leq \frac{5}{8}. \tag{3}$$

Por lo tanto, 3/8, el promedio entre 1/8 y 5/8, es una aproximación al verdadero valor de la integral con un error que no puede ser mayor que la mitad de la longitud del intervalo $(5/8, 1/8)$. Es decir, el error que estamos cometiendo es menor que 1/4. Ver el ejercicio 8.

El error cometido al usar la aproximación de la observación 1.0.2 es a lo sumo

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

A continuación propondremos una serie de ejercicios que apunta a desarrollar la idea de ir mejorando las estimaciones de la integral por encima y por debajo, para ir achicando más y más el rango de valores que puede tomar. Este procedimiento nos permitirá conocer el verdadero valor de la integral con el grado de aproximación que se desee. También, dando el gran salto intelectual de pasar al límite en las aproximaciones, determinarlo con total exactitud.

Ejercicio 1 Es posible mejorar la estimación superior de la integral que presentamos en la observación 1.0.2 usando tres rectángulos para cubrir el gráfico, en vez de dos, tal como se muestra en la figura 5.

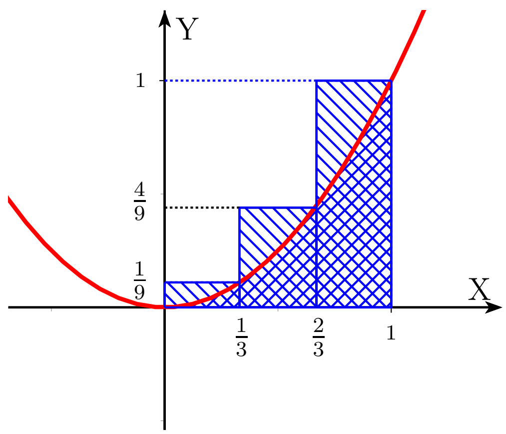


Figura 5. Otra aproximación por exceso.

1. Calcular el valor que a partir de la figura 5 puede conseguirse como una estimación superior de la integral.

2. Adaptar el razonamiento que en la observación 1.0.1 permitió estimar por debajo la integral, para conseguir una estimación inferior de la integral a partir de rectángulos. NOTA: para esta estimación uno de los rectángulos degenera en un segmento de recta.

Intuitivamente parece ser una mejor aproximación

Si el lector ha completado correctamente el ejercicio 1 habrá encontrado una estimación más precisa que 3 para el valor de la integral. Ahora debería disponer de un intervalo más más pequeño de posibles valores, lo que permite construir una mejor aproximación para la integral.

La estrategia de tomar rectángulos cada vez más finos nos obligará a ir dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en subintervalos cada vez más pequeños, que harán las veces de bases de los rectángulos de nuestra aproximación. Esto es lo que se llama hacer *particiones* del intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 2 Hallar una estimación inferior y una estimación superior de la integral haciendo los cálculos que sugiere las figuras 6 y 7, respectivamente, a partir de una partición de $[0, 1]$ en cuatro subintervalos iguales.

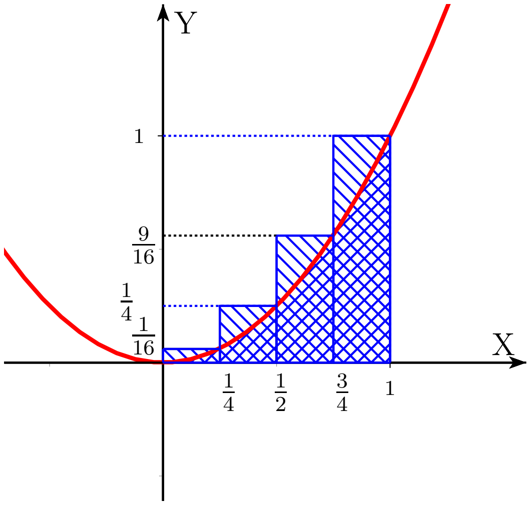


Figura 6. Otra aproximación por exceso.

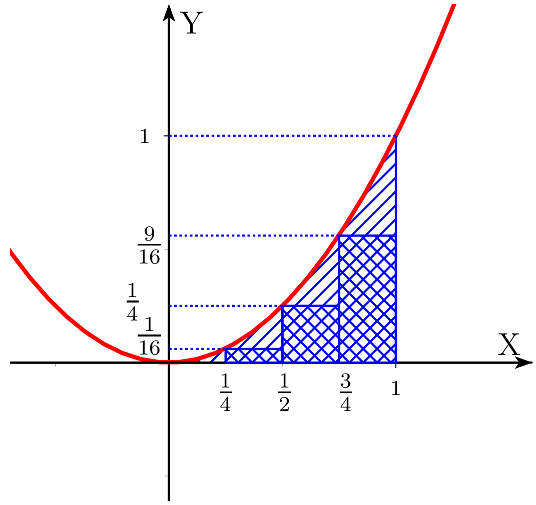


Figura 7. Otra aproximación por defecto.

Ejercicio 3 En cada caso, dividir el intervalo de integración en 1, 2 y 4 subintervalos iguales, y construir estimaciones de las integrales que se proponen.

1. $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 + x\right)\, dx;$

2. $\displaystyle\int_0^1 e^x dx.$

Usar las estimaciones para construir una aproximación del verdadero valor de la integral y dar una cota del error cometido.

1.2 Sistematización de las aproximaciones

El procedimiento de subdividir el intervalo $[0, 1]$ y construir estimaciones puede hacerse para cualquier número n de subintervalos, y va ganando en precisión a medida que vamos afinando las divisiones.

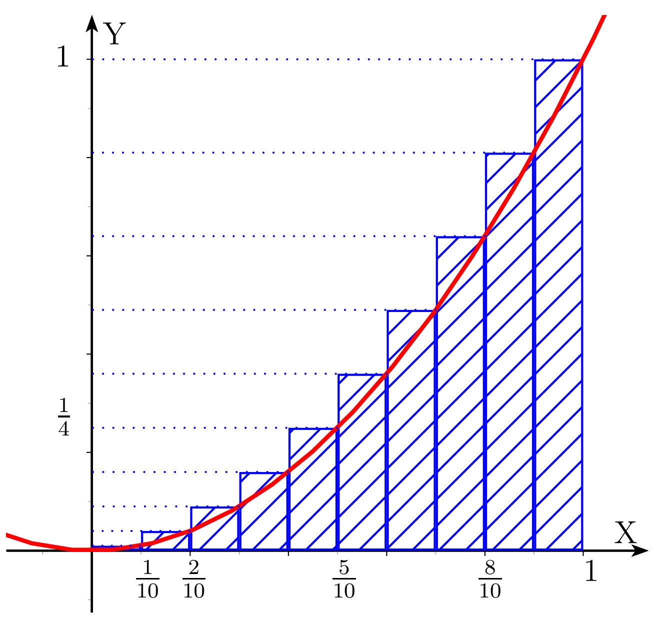


Figura 8. Aproximación por exceso con 10 intervalos.

La entrada de wikipedia en español `http://es.wikipedia.org/wiki/Suma_de_Riemann` contiene un dibujo que ilustra la idea: cuanto más se refina la partición en rectángulos, mejor aproxima el área de los rectángulos al área bajo el gráfico. Recomendamos visitar este recurso, u otros equivalentes sobre la web. A continuación presentamos la estimación superior que se consigue para la integral

$$\int_0^1 x^2 dx$$

para $n = 10$. Cada rectángulo tiene un ancho de $1/10$ y una altura $(i/10)^2$ con $i = 1, \ldots, 10$.

Según lo sugerido por la figura 8 las areas de los rectángulos ahí dibujados nos da una aproximación por exceso de la integral.

Observación 1.0.3 Un poco de jerga. Llamaremos suma superior n-ésima y usaremos la notación S_n para la suma de áreas de rectángulos que aproxima la integral por exceso, porque cada rectángulo tiene una altura igual al valor máximo que la función a integrar toma sobre el subintervalo que forma su base.

La suma superior S_{10} que se obtiene en este caso es

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx \leq & \frac{1}{10}\times\frac{1}{100}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{25}+\frac{1}{10}\times\frac{9}{100}+\frac{1}{10}\times\frac{4}{25}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{4}+ \\ & \frac{1}{10}\times\frac{9}{25}+\frac{1}{10}\times\frac{49}{100}+\frac{1}{10}\times\frac{16}{25}+\frac{1}{10}\times\frac{81}{100}+\frac{1}{10}\times 1 \\ & = \frac{77}{200}.\end{aligned} \tag{4}$$

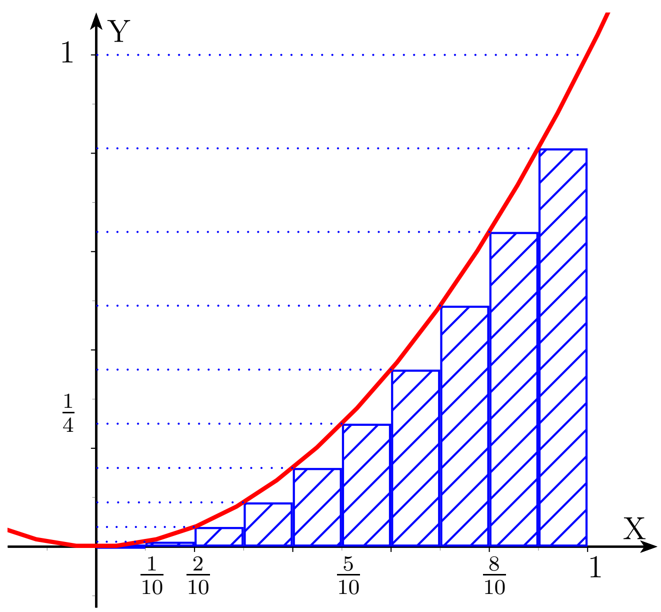


Figura 9. aproximación por defecto con 10 intervalos.

Observación 1.0.4 A la aproximación por defecto se le denomina suma $n-$esima inferior y la denotamos s_n.

Ejercicio 4 Calcular la suma inferior s_{10} correspondiente a la figura 9.

Ejercicio 5 Para la subdivisión de $[0, 1]$ en 10 intervalos y la función x^2,

1. mostrar que la suma superior puede expresarse como

$$S_{10} = \frac{1}{10}\left(\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{10}{10}\right)^2\right),$$

   que a su vez puede simplificarse en

$$S_{10} = \frac{1}{1.000}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 + 10^2\right);$$

2. hallar las expresiones análogas para la suma inferior s_{10}.

Aunque el número 10 pueda tener una gran importancia cultural, a los efectos de este cálculo no es en absoluto especial. El procedimiento de calcular sumas inferiores y superiores puede hacerse para cualquier número, tal como sugiere la figura 10

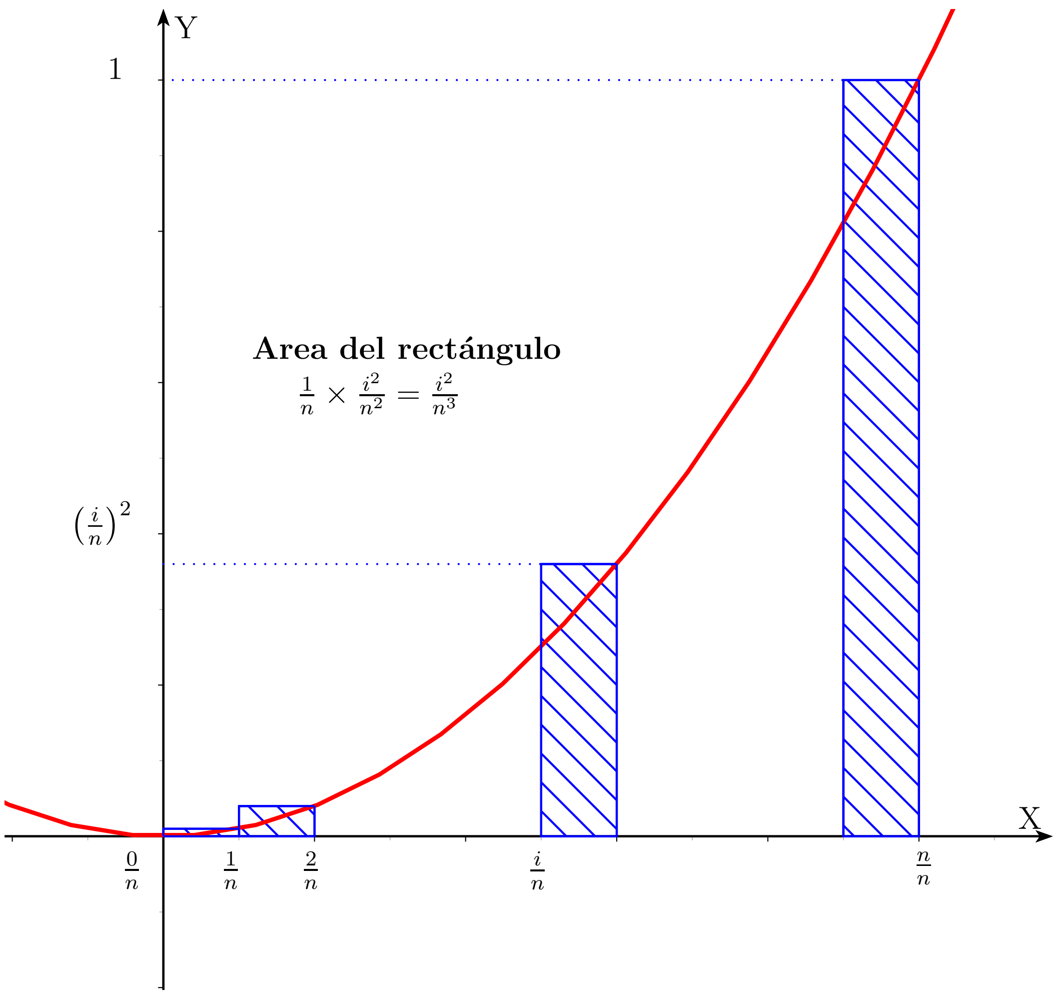


Figura 10. División de $[0,1]$ en n intervalos.

Ejercicio 6 Para la subdivisión de $[0,1]$ en n intervalos y la función x^2,

1. mostrar que la suma superior puede expresarse como

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\right);$$

2. hallar la expresiones análoga para la suma inferior s_n;

3. Para $n = 1, 2, 3, 4$ las sumas superior e inferior ya habían sido calculadas. Verificar que las fórmulas generales predicen correctamente los valores que ya teníamos.

Las sumas superiores S_n tienen una estructura bien clara: son el resultado de dividir la suma

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + (n-1)^2 + n^2,$$

de los n primeros cuadrados, entre n^3. Nada nos vendría mejor en este momento que una fórmula sencilla para la suma de los n primeros cuadrados. Afortunadamente, tal cosa existe:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{5}$$

Observación 1.0.5 Una interesante prueba visual de la igualdad (5) está disponible en

`http://sferrerobravo.wordpress.com/2008/05/18/suma-visual-de-cuadrados/`

Requiere como insumo una expresión para la suma de los n primeros números, que es además un resultado interesante en sí mismo del que haremos uso:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{6}$$

Ejercicio 7

1. Usar la fórmula (5) para mostrar que

$$S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \tag{7}$$

¿A qué valor se aproximan las sumas S_n cuando $n \to \infty$?

2. Usar la fórmula (5) y obtener para s_n expresiones análogas a las que conseguimos en (7) para S_n. ¿A qué valor se aproximan las sumas s_n cuando $n \to \infty$?

3. Hallar el valor de la integral

$$\int_0^1 x^2.$$

Con este cálculo, hemos completado la determinación de la primera integral que no puede reducirse al cálculo de áreas de rectángulos, triángulos, trapecios y sectores de círculo. Hemos necesitado hacer uso del proceso del paso al límite y entrado decididamente en el terreno del cálculo integral tal como es hoy en día.

Ejercicio 8 En la observación 1.0.2 habíamos conseguido aproximar la integral por el valor $3/8$ y asegurábamos que el error cometido no podía ser mayor que $1/4$. Ahora que se conoce el verdaro valor, calcular el error que introduce aproximar la integral por $3/8$ y decidir si este error efectivamente es menor que $1/4$ o no lo es.

1.3 Extensiones y aplicaciones del método

Este método de aproximación de integrales y paso al límite puede utilizarse para funciones cualesquiera, sobre cualquier intervalo. A continuación lo aplicaremos en algunos ejemplos.

Ejercicio 9

1. Calcular
$$\int_0^2 x^2\,dx$$
por el método de tomar particiones y pasar al límite.

2. Usar el resultado de la parte anterior para calcular
$$\int_1^2 x^2\,dx.$$

3. Calcular nuevamente la integral de la parte anterior, aplicándole directamente el método de las particiones y paso al límite.

Ejercicio 10 Hallar una aproximación de
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$
con un error menor a $1/20$.

Ejercicio 11 Estimar
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(x)dx$$
con un error menor que $1/10$. Sugerencia: usar la simetría para reducir el cálculo al de estimar una integral en el intervalo $[0, \pi/4]$, en el que la función coseno es monótona. Ir dividiendo el intervalo, duplicando en cada paso la cantidad de subintervalos, de modo de aprovechar las evaluaciones del paso anterior.

Ejercicio 12 Dado el gráfico de la figura 11. Hallar una aproximación de la integral entre 2 y 8, y dar una cota del error cometido.

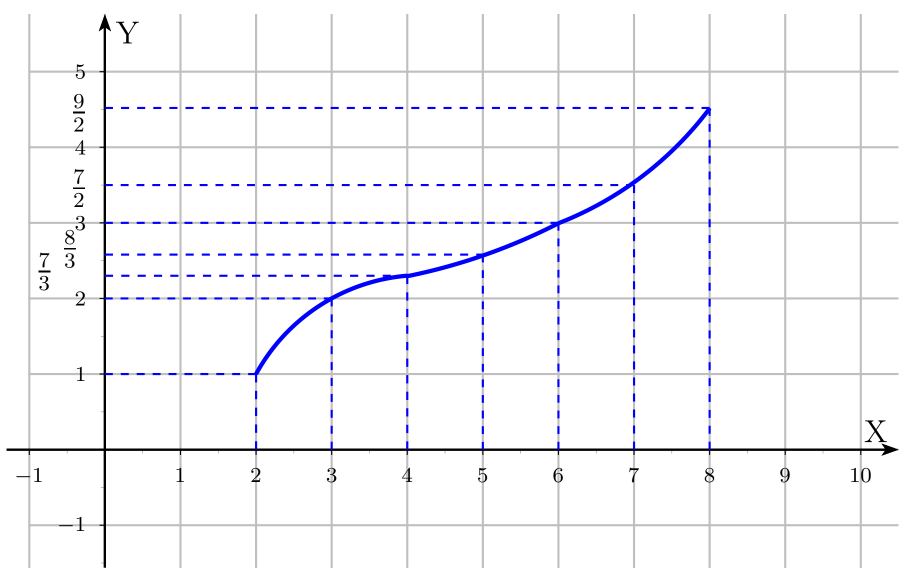


Figura 11.

Observación 1.0.6 Linealidad de la integral. Para cualquier función f continua definida sobre un intervalo $[a, b]$ la integral puede calcularse como límite de sumas superiores, sumas inferiores, o sumas construidas a partir de evaluaciones de la función en puntos cualesquiera de cada subintervalo. Ver los ejercicios 9 y 27, en los que se propone la construcción de otras sumas, diferentes de las inferiores y las superiores, para calcular la integral de x^2.

Este hecho permite demostrar las siguientes propiedades de *linealidad de la integral*: para cualquier par de funciones continuas definidas sobre el intevalor $[a, b]$ y cualquier número α se satisface:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x))\, dx &= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx. \\ \int_a^b (\alpha f(x))\, dx &= \alpha \int_a^b f(x)\, dx. \end{aligned} \tag{8}$$

No intentaremos hacer una demostración completa de esta propiedad, de la que haremos uso frecuentemente en diversos momentos del curso, pero sí proponemos elaborar sus principales ideas.

Ejercicio 13 Asumiendo como verdadera la afirmación que se hace al comienzo de esta afirmación en el sentido de que las integrales siempre pueden aproximarse por sumas, construir un argumento para justificar la validez de las fórmulas (8).

Para cerrar esta observación, recomendamos al lector examinar la integral de la parte 1 del ejercicio 3 y las aproximaciones que se construyeron al resolverlo, a la luz del argumento construido al trabajar sobre el ejercicio 13.

2 Profundizaciones y excursiones laterales

Una demostración de (6) está implícita en la siguiente figura:

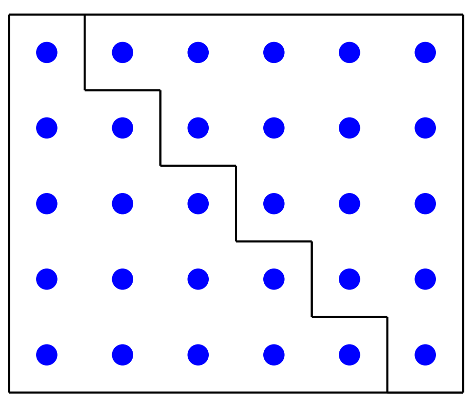
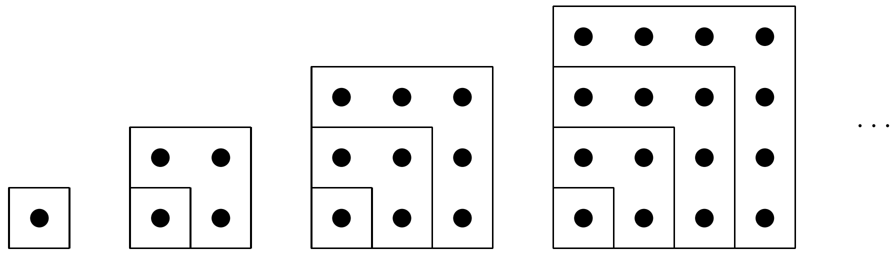


Figura 12. Figura para calcular la suma $1 + 2 + \cdots + n$.

El esquema de algún modo viene a ilustrar el argumento con el que a la edad de 7 años Carl Gauss (1777-1855) sorprendió a sus profesores sumando casi instantáneamante los números del 1 al 100, a partir de la observación de que pueden agruparse en 50 parejas que suman 101. Puede ser interesante pensar cómo la figura permite justificar, e incluso intuir, la validez de la fórmula (6).

Las pruebas visuales de resultados matemáticos constituyen un conjunto interesante de actividades. Además de la que está implícita en la figura para la fórmula (6), a continuación proponemos otras dos para el lector con gusto por este tipo de desafíos. La primera sobre un resultado aritmética, la segunda sobre uno geométrico.

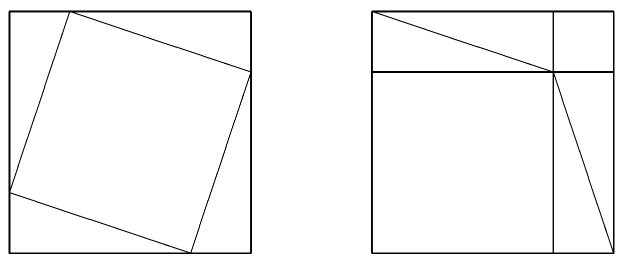
Ejercicio 14 ¿Qué identidad numérica sugiere el siguiente diagrama?



Usar la identidad sugerida por el diagrama para demostrar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejercicio 15 ¿La justificación de qué famoso teorema de la geometría está encerrada en estas figuras? ¿Por qué?



Ejercicio 16 Calcular

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

con un error menor a 1/20.

Ejercicio 17 Para el gráfico de la figura 13 hallar una aproximación del integral de 2 a 9 e indicar una cota del error cometido.

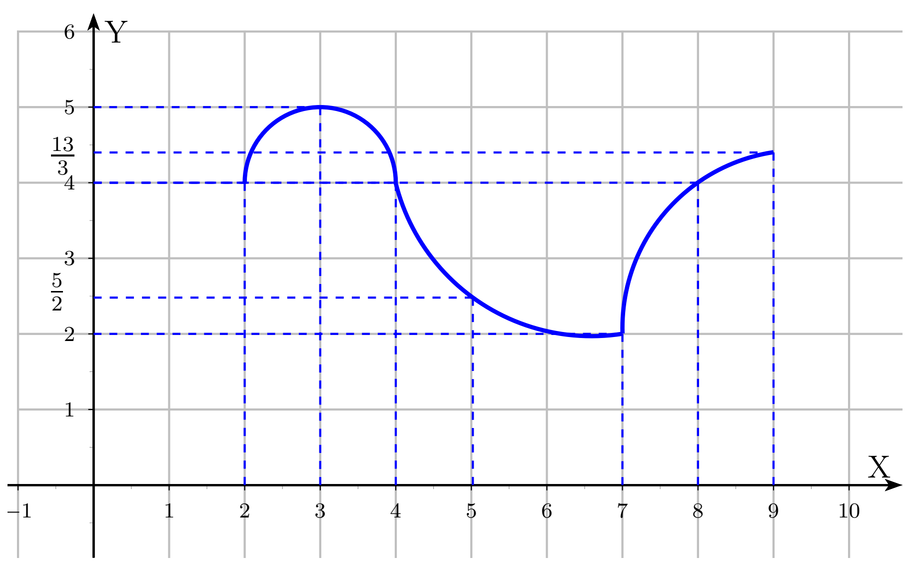


Figura 13.

Ejercicio 18 La primera fila de la tabla contiene los valores que resultan de evaluar una cierta función f en los puntos de la segunda fila.

$f(x)$	1	2	3	8/3	2	3/2	1
x	-2	0	1	3/2	2	5/2	3

1. Proponer una aproximación para el valor de

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx.$$

2. ¿Es posible dar alguna estimación del error cometido?

3. Si se sabe además que f es monótona entre los puntos para los que se conocen las evaluaciones proporcionadas por la tabla, ¿puede darse una estimación del error cometido? Este conocimiento, ¿sugiere cambiar la estrategia para construir una estimación respecto a la que se empleó en la parte anterior?

Ejercicio 19

1. Mostrar que cuando $n \to \infty$ cualquier sucesión de números de la forma

$$\frac{\theta_1^2 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_n^2}{n}, \tag{9}$$

con $\theta_i \in [(i-1)/n, i/n]$, aproxima $\int_0^1 x^2\,dx$. Sugerencia: interpretar geométricamente la fórmula en términos de una aproximación del área bajo el gráfico de $f(x) = x^2$ por medio de rectángulos.

2. Fijada una tolerancia `tol` hallar el menor valor de n que asegura para cualquier fórmula del tipo (9) un error menor que `tol` en la aproximación de la integral. Justificar la respuesta.

Ejercicio 20 Calcular

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

por el método de las particiones y paso al límite. Sugerencia: recordar o investigar cómo se calcula la suma de una sucesión geométrica y el cálculo de límites con la exponencial.

3 Para entrenar

Ejercicio 21 Calcular las estimaciones inferior y superior para la integral

$$\int_0^1 t^2\,dt,$$

que pueden conseguirse al dividir $[0,1]$ en tres subintervalos iguales.

En la sección anterior hemos anunciado que estábamos presentando un procedimiento general para el cálculo integral. Debería poder aplicarse a los ejemplos ya conocidos, por lo que proponemos ahora un ejercicio para usar la estrategia de partir en rectángulos para calcular

$$\int_0^1 x dx, \tag{10}$$

cuyo resultado ya conocemos y sabemos que es $1/2$. Esta aplicación puede usarse tanto para prácticar el método como para trabajar en un ejemplo simple en el proceso de apropiarse de él.

Ejercicio 22

1. Calcular sumas inferiores s_n y superiores S_n para la integral (10) y $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Mostrar que las sumas s_n tiene la expresión general

$$s_n = \frac{0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1}{n^2},$$

   que puede simplificarse con la ayuda de la fórmula (6) en

$$s_n = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

3. Hallar expresiones análogas para S_n.
4. Discutir si el procedimiento de las aproximaciones predice para la integral (10) el mismo valor que el procedimiento geométrico elemental.
5. Discutir el significado geométrico de las diferencias

$$s_n - \frac{1}{2}, \quad S_n - \frac{1}{2},$$

   entre las aproximaciones construidas por el método de los rectángulos y el verdadero valor de la integral.

Ejercicio 23 Si se desea utilizar el método de los rectángulos para estimar la integral

$$\int_0^1 x dx$$

por la suma s_n con un error menor que $1/1000$, entonces la menor cantidad de subintervalos iguales en que hay que dividir el intervalo $[0, 1]$ es

A. 500;

B. 501;

C. 1000;

D. 1001;

E. 2000;

F. 2001:

Ejercicio 24 Construir una aproximación A_n para la integral

$$\int_0^1 x\,dx$$

usando el método de los rectángulos para una partición del intervalo $[0,1]$ en n subintervalos iguales, y evaluando la función en el punto medio de cada subintervalo.

Ejercicio 25 Calcular la integral

$$\int_0^1 \left(x^2+x\right)dx$$

por el procedimiento de hallar sumas asociadas a particiones del intervalo de integración y pasar al límite.

Ejercicio 26 Para cada $x>0$, adaptar los argumentos desarrollados para el cálculo de

$$\int_0^1 t^2\,dt,$$

para calcular estimaciones inferiores y superiores de la integral

$$\int_0^x t^2\,dt$$

haciendo particiones del intervalo $[0,x]$ en 1, 2, 3 y 4 subintervalos iguales y calculando sumas adecuadas de áreas de rectángulos.

Es posible construir sumas que aproximen a la integral construyendo sobre los subintervalos de una partición rectángulos cuya altura sea igual al valor del integrando en un punto cualquiera del subintervalo. Cuando los puntos de evaluación se ubican en los puntos en que la función alcanza su mínimo sobre cada subintervalo, se obtienen sumas inferiores s_n; cuando se ubican donde la función alcanza su máximo, resultan las sumas superiores S_n. A continuación examinamos una estrategia alternativa que también permite aproximar la integral. Tiene la ventaja de que no requiere estudiar la función para saber donde están los máximos y los mínimos sobre cada intervalor. La desventaja es que no pueden asegurarse cotas para el error cometido.

Ejercicio 27 Se puede estimar la integral

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

partiendo el intervalo $[0,1]$ en n partes iguales y aproximando la región bajo el gráfico por rectángulos con alturas calculadas a partir de la evaluación de la función $f(x)=x^2$ en el punto medio de cada subintervalo. Calcular las aproximaciones que se obtienen cuando $[0,1]$ se subdivide en 1, 2, 3 y 4 intervalos.

A Revisión de ejemplos con argumentos de geometría elemental

Ejemplo A.1 La integral

$$\int_0^1 1dx$$

es igual al área de la región encerrada bajo el gráfico de la función constante 1 entre 0 y 1. Esta región es el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, y tiene área 1. Como está completamente ubicada por encima del eje Ox concluimos que el valor de la integral es 1.

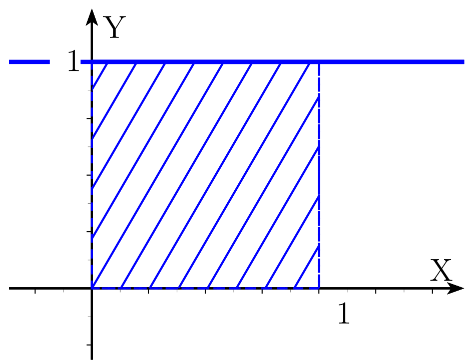


Figura 14. Función constante 1 entre 0 y 1.

Ejemplo A.2 La integral

$$\int_0^1 xdx$$

es igual al área de la región encerrada bajo el gráfico de la función $f(x) = x$ entre 0 y 1.

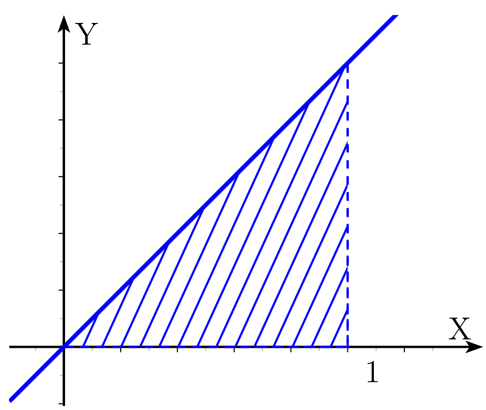


Figura 15

Esta región es un triángulo rectángulo ubicado en el semiplano superior, que tiene como base el segmento $[0,1]$ del eje Ox, su ángulo recto en el vértice ubicado el punto $(1,0)$ y altura 1, respecto al lado ubicado en el eje Ox, igual a 1. Por lo tanto,

$$\int_0^1 xdx = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo A.3 También la integral

$$\int_{-1}^{4} (1 - |x-2|)\, dx$$

puede calcularse a través de la evaluación de áreas de figuras elementales. En este caso hay que tener en cuenta además que en el intervalo $[-1, 4]$ hay puntos en que el integrando es negativo, por lo que hay que considerar áreas signadas. Aunque es un ejemplo de complejidad algo mayor que los ejemplos A.1 y A.2, no tiene una dificultad mayor que éstos en lo que hace a la evaluación de áreas.

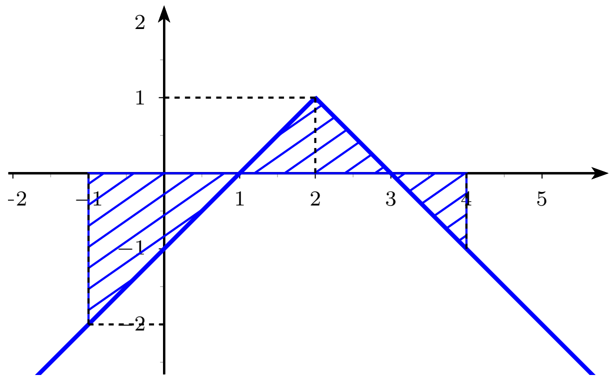


Figura 16.

En el intervalo $[-1, 1]$ se tiene un triángulo correspondiente a un area negativa de valor -2 y en $[1, 3]$ un triángulo correspondiente a un area positiva de valor 1 y en el intervalo $[3, 4]$ nuevamente un area negativa de valor $-\frac{1}{2}$, por lo que el valor total es $-\frac{3}{2}$.

En los ejemplos anteriores nos ayuda el conocimiento de fórmulas para el área de rectángulos y triángulos. Cuando el gráfico de la función no es una línea recta, las cosas se vuelven más difíciles. Hay todavía un caso más en que el cálculo de integrales puede resolverse directamente a partir del conocimiento de áreas de figuras elementales. Proponemos a continuación dos ejemplos.

Ejemplo A.4 La región encerrada bajo el gráfico de la función

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$

es una semicircunferencia de radio 1. Por lo tanto

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio 28 Calcular

$$\int_{0}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx.$$

Un poco más compleja, pero también abordable por métodos elementales, es la determinación de la siguiente integral.

Ejercicio 29 Calcular

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Sugerencia: la región que queda encerrada bajo el gráfico del integrando puede considerarse como la diferencia entre un sector de círculo y un triángulo.

B Resultados de ejercicios seleccionados

EJERCICIO 21. Se obtienen las siguientes estimaciones

$$s_3 = \frac{5}{27} \leq \int_0^1 x^2\,dx \leq \frac{14}{27} = S_3.$$

EJERCICIO 27. Cuando en el ejercicio 27 se subdivide el intervalo $[0,1]$ en un subintervalo,´el método de aproximación que se propone devuelve el valor

$$1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Cuando se aplica con dos subintervalos iguales, se consigue

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

como aproximación de la integral.