

## VALOR ABSOLUTO Y OTRAS FUNCIONES LINEALES A TROZOS

## Resumen

El propósito de este material es repasar la noción de *valor absoluto* y la función real asociada con ella. También repasar cómo graficar algunas funciones definidas por fórmulas en las que aparezcan valores absolutos de expresiones lineales. Los requisitos previos para la lectura son cierta familiaridad con las funciones lineales definidas por fórmulas de la forma

$$f(x) = ax + b,$$

donde  $a$  y  $b$  pueden ser constantes cualesquiera, y sus gráficos en el plano  $(x, y)$ .

El *valor absoluto* de un número cada  $x \in \mathbb{R}$  se indica por el símbolo  $|x|$ , y está definido por

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

**Ejemplo 1** El valor absoluto de 3 es  $|3| = 3$ . El valor absoluto de  $-1$  es  $|-1| = -(-1) = 1$ .

**Observación 1** Podría objetarse a la fórmula (1) que parece dar dos definiciones diferentes del valor absoluto para  $x = 0$ , que sería preferible escribir

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Como  $0 = -0$ , cualquiera de las dos expresiones coincide en asignar el valor 0 al valor absoluto de 0, por lo que no se genera ninguna contradicción. Preferimos (1) porque nos recuerda que  $|x|$  coincide con  $-x$  sobre todo el intervalo  $(-\infty, 0]$ , y con  $x$  sobre todo  $[0, +\infty)$ . En  $x = 0$  simplemente ocurre que  $x$ ,  $-x$  y  $|x|$  toman el mismo valor.

Para calcular el valor absoluto de expresiones más complejas, como, por ejemplo

$$\left| \frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16} \right|$$

operamos de la manera habitual con los números afectados por la barra de valor absoluto:

$$\left| \frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16} \right| = \left| \frac{3}{4} - \frac{35}{16} \right| = \left| \frac{12}{16} - \frac{35}{16} \right| = \left| -\frac{23}{16} \right|.$$

Por último, tomamos la decisión que corresponda, dependiendo del signo que tenga el resultado de las operaciones anteriores. En este caso es negativo, por lo tanto

$$\left| \frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16} \right| = \left| -\frac{23}{16} \right| = -\left( -\frac{23}{16} \right) = \frac{23}{16}.$$

Cuando todo es tan explícito como en este ejemplo, el último paso de tomar el opuesto de un número negativo resulta bastante obvio, por lo que es corriente escribir simplemente

$$\left| \frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16} \right| = \left| -\frac{23}{16} \right| = \frac{23}{16}.$$

La última igualdad aparece a la vista como “sacar” las barras de valor absoluto, pero en realidad lo que se está haciendo es aplicar la definición de esta función.

**Ejercicio 1** Calcular

$$-\frac{5}{3} - 1 - \left| 2 \times \left( -\frac{5}{3} \right) + 3 \right|.$$

## 1. La función valor absoluto y su gráfico

Tal como indica la fórmula (1), el valor absoluto puede calcularse para cualquier número real  $x$ , por lo que esta operación define una función

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ampliando un poco el uso de la expresión valor absoluto, llamaremos a esta función la función *valor absoluto*. Naturalmente, indicaremos con el símbolo  $|x|$  el valor que esta función toma en  $x$ .

Para graficar valor absoluto recurrimos a la definición. Sabemos que

$$|x| = x, \quad x \geq 0; \quad |x| = -x, \quad x \leq 0$$

Los gráficos gráfico de  $f(x) = x$  y  $f(x) = -x$  son sencillos.

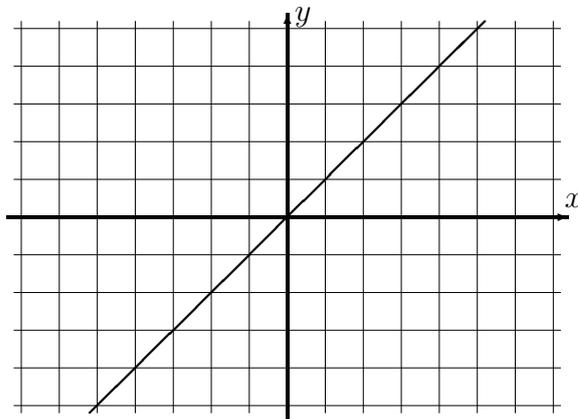


Gráfico de  $f(x) = x$ .

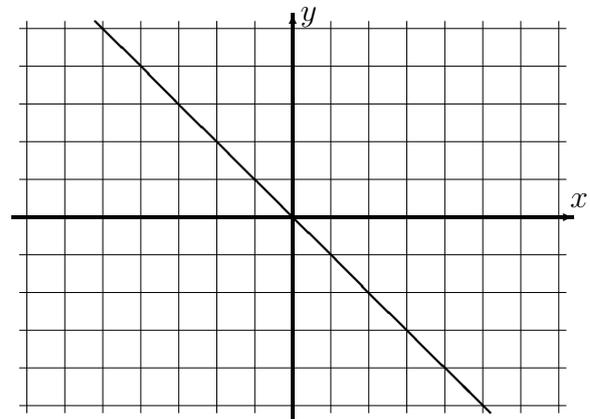


Gráfico de  $f(x) = -x$ .

Naturalmente, del primero de ellos este gráfico sólo nos interesa la información para  $x \geq 0$ , que es la región en que  $|x|$  coincide con  $x$ . Del segundo, la información para  $x \leq 0$ . Combinando ambas podemos construir el gráfico de la función valor absoluto. El resultado se muestra en la figura 1. Aparecen allí, en trazo discontinuo, las partes de los gráficos de  $f(x) = x$  y  $f(x) = -x$  que no guardan relación con el valor absoluto, porque corresponden a intervalos donde la definición del valor absoluto está dada por otra fórmula.

Una verificación de que el dibujo es correcto puede hacerse ubicando en el gráfico algunos puntos concretos. Que los dibujos caigan en el gráfico no es una comprobación cien por ciento segura de que el dibujo sea correcto, porque bien podría haber un error en otra parte, pero

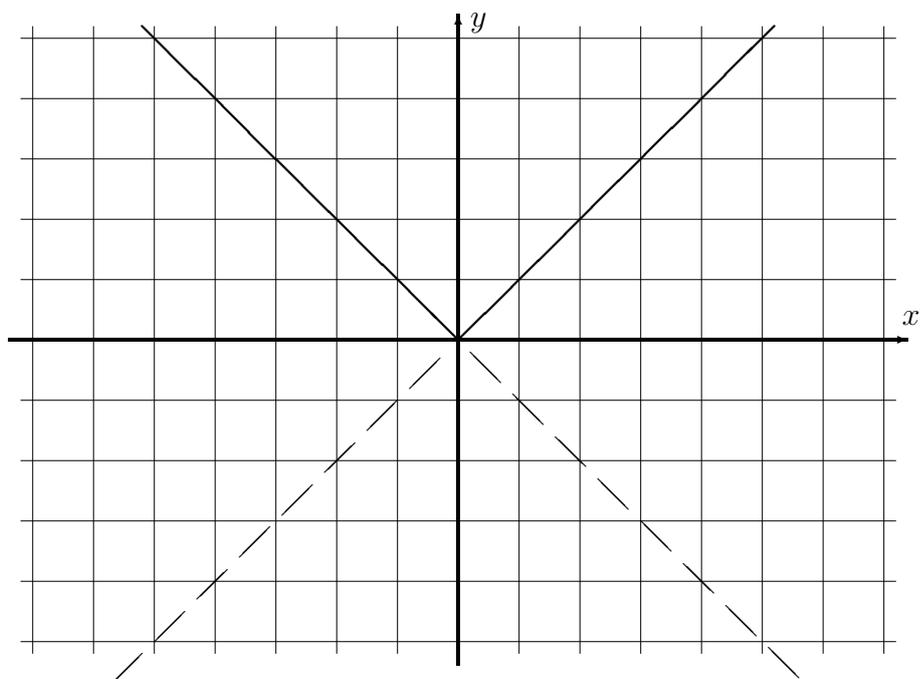


Figura 1: Gráfico de valor absoluto superpuesto a los dos gráficos auxiliares de  $x$  y  $-x$

ya es más improbable. En este caso particular, con el origen y otros dos puntos bien escogidos es suficiente, porque la gráfica es lineal a trozos y el valor absoluto no tiene puntos de discontinuidad.

El punto  $(0, 0)$  del plano  $(x, y)$  está en el gráfico de valor absoluto, porque  $|0| = 0$ . Para  $x = 1$  se tiene  $|x| = 1$ , lo que da lugar al punto  $(1, 1)$  en el gráfico. Para  $x = -3$  se tiene  $|x| = 3$  y el punto  $(-3, 3)$ . Estos tres puntos, destacados sobre una gráfica del valor absoluto ya sin líneas auxiliares y dibujada de un modo que enfatiza los valores positivos del eje vertical, aparece en la figura 2.

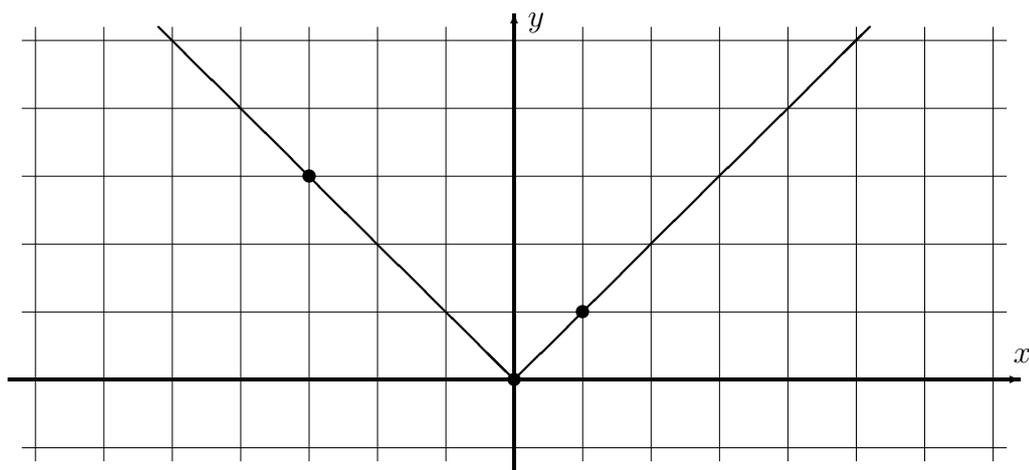


Figura 2: Gráfico de valor absoluto

## 2. Valores absolutos y funciones lineales

El objetivo de esta sección es estudiar los gráficos de funciones que son combinaciones lineales de funciones lineales y valores absolutos de funciones lineales. En vez de perdernos en este trabalenguas, discutiremos un ejemplo.

**Ejemplo 2** Vamos a conseguir una representación gráfica de la función

$$f(x) = x - 1 - |2x + 3|. \quad (2)$$

Recordemos que el gráfico es la representación de todos los puntos  $(x, f(x))$ . Podemos conseguir algunos de ellos simplemente evaluando en algunos lugares. Por ejemplo,

$$f(0) = 0 - 1 - |2 \times 0 + 3| = -4.$$

El punto  $(0, -4)$  tiene que estar en el gráfico de  $f$ . La elección de este punto fue bastante arbitraria. Podemos repetir el procedimiento para cualquier punto. A modo de ejercicio proponemos al lector otras cuatro elecciones posibles, tomadas sin mayor criterio.

**Ejercicio 2** Ubicar en el plano  $(x, y)$  los puntos del gráfico de  $f$  que corresponden a  $x = -5$  y  $x = 5$ .

Conseguir el gráfico ubicando muchos puntos es un procedimiento que puede dar resultado cuando se hace con una computadora, que es capaz de calcular miles de puntos en muy poco tiempo. Es una opción. Pero mostraremos a continuación cómo resolver la tarea sin programar. Antes de seguir avanzando hay un punto específico que sí conviene calcular: es el que corresponde al valor de  $x$  en que cambia de signo la expresión afectada por el valor absoluto. En nuestro ejemplo, dentro del valor absoluto aparece

$$2x + 3,$$

que se anula en

$$x = -\frac{3}{2}.$$

Allí  $2x + 3$  pasa de negativa a positiva. Evaluamos  $f$  en ese punto y obtenemos

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} - 1 - \left|2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 3\right| = -\frac{5}{2}. \quad (3)$$

Acabamos de ubicar un nuevo punto que podemos poner en el gráfico. Veremos luego que este punto es realmente importante, pero ahora tomaremos una dirección ligeramente diferente.

La expresión  $|2x + 3|$  es igual a  $-(2x + 3)$  o a  $2x + 3$ , dependiendo de que  $2x + 3$  sea, respectivamente, menor o igual que cero, o mayor o igual que cero. Tenemos entonces

$$|2x + 3| = \begin{cases} -2x - 3, & x \leq -3/2; \\ 2x + 3, & x \geq 3/2. \end{cases}$$

Usando esta información en la definición de la función  $f$  obtenemos

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 - (-2x - 3) = 3x + 2, & x \leq -3/2; \\ x - 1 - (2x + 3) = -x - 4, & x \geq 3/2. \end{cases}$$

Vemos que tanto para  $x \leq -3/2$  como para  $x \geq -3/2$ , los valores que toma la función  $f$  pueden calcularse por medio de expresiones lineales relativamente simples. La única dificultad es que hay que pasar de una expresión a la otra, de un lado a otro de  $-3/2$ .

Al evaluar  $3x + 2$  en  $x = -3/2$  obtenemos el valor

$$3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 2 = -\frac{5}{2}.$$

El mismo cálculo  $-x - 4$  arroja

$$-\left(-\frac{3}{2}\right) - 4 = -\frac{5}{2}.$$

Como era de esperar, ambas expresiones devuelven el valor de la función, que ya habíamos calculado en (3).

**Observación 2** El cálculo de  $f(-3/2)$  es redundante y puede parecer innecesario. Sin embargo reiteremos la idea de que tiene valor importante como verificación. Notemos además que la evaluación de  $f$  en ese punto se vuelve especialmente sencilla, porque la parte en la que aparece el valor absoluto se anula. En la observación 3 volveremos sobre el interés que para este ejemplo específico tiene calcular el valor de  $f$  en este punto.

Dado que para  $x \leq -3/2$  los valores funcionales de  $f$  con los de  $3x + 2$ , el gráfico de  $f$  sobre ese intervalo coincide con el de la función lineal  $3x + 2$ . El mismo razonamiento permite concluir que el gráfico de  $f$  coincide con el de  $-x - 4$  para  $x \geq -3/2$ . En la figura 3 aparecen los gráficos de estas dos funciones lineales.

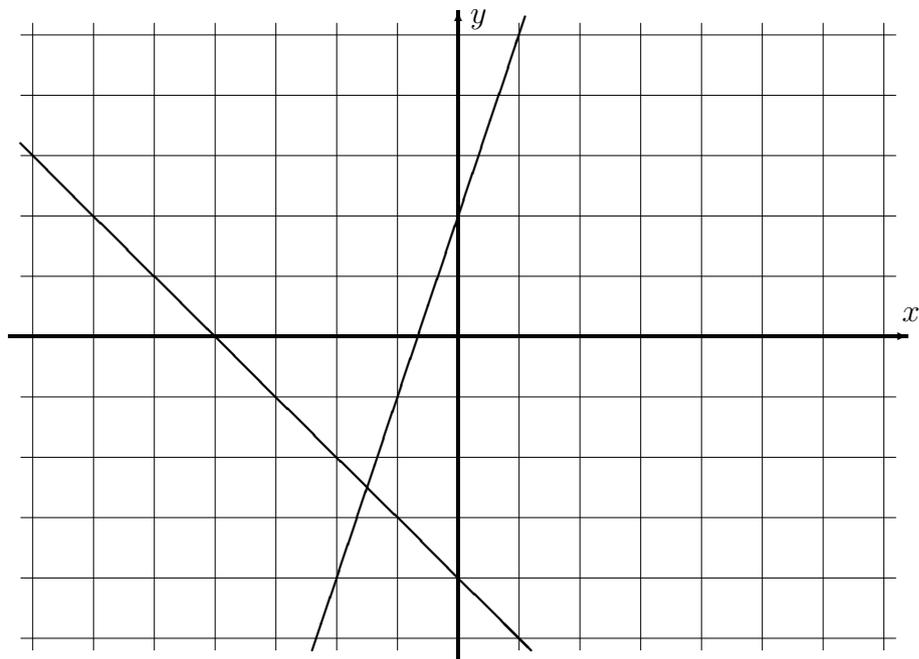


Figura 3: Gráficos auxiliares para el gráfico de  $x - 1 - |2x + 3|$

Identificando correctamente qué parte de cada recta es relevante para el gráfico de  $f$ , podemos construir su gráfico a partir de la figura 3. Recordemos que a la izquierda de  $x = -3/2$ , que es la abscisa del punto de corte de las dos rectas oblicuas en la figura 3, los valores de la función  $f$  coinciden con los de  $3x + 2$ , por lo que es la parte del gráfico de esta función que

cae a la izquierda de  $x = -3/2$  lo que nos interesa conservar. Es decir, los puntos  $(x, y)$  que cumplen las condiciones

$$y = 3x + 2, \quad x \leq -\frac{3}{2}.$$

Para  $x \geq -3/2$  conservamos los puntos que corresponden al gráfico de  $-x - 4$ . O sea, los puntos de la forma

$$y = -x - 4, \quad x \geq -\frac{3}{2}.$$

El resultado se muestra en la figura 4. Todo el gráfico de  $f$  cae en el semiplano  $y \leq 0$ , que hemos enfatizado en ese dibujo.

Para cerrar esta parte del cálculo, verificaremos que los puntos  $(-3/2, -5/2)$  y  $(0, -4)$  están en el gráfico de  $f$ . Lo explicitamos destacando estos puntos en la figura 4.

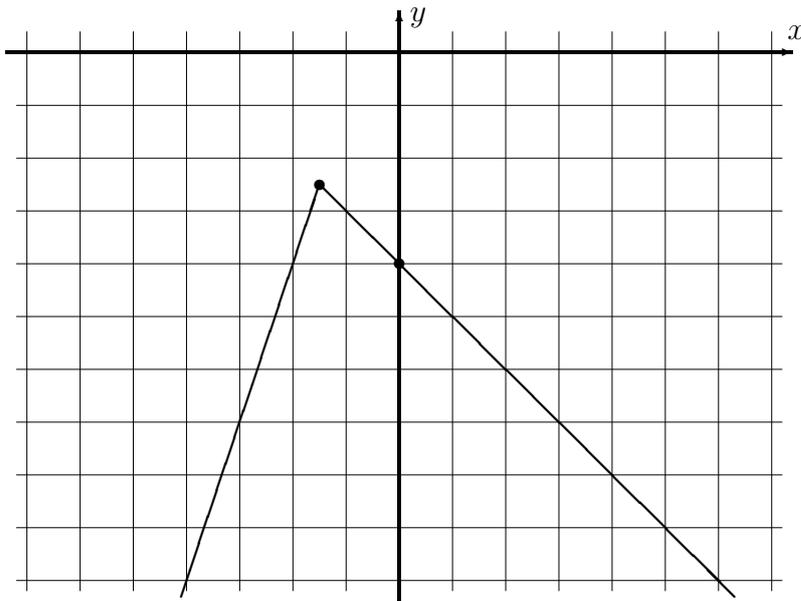


Figura 4: Gráfico de  $x - 1 - |2x + 3|$  con puntos destacados

**Ejercicio 3** Verificar que los puntos encontrados en el ejercicio 2, están en el gráfico de  $f$ .

**Observación 3** El gráfico de  $f$  es lineal a trozos. Es un gráfico continuo que sobre un intervalo coincide con el de una función lineal y sobre otro intervalo con el de otra función lineal. Se pasa de una función lineal a la otra en  $x = -3/2$ , que da lugar al punto  $(-3/2, -5/2)$  sobre el gráfico de  $f$ . Si podemos ubicar un punto del gráfico de  $f$  que esté a la derecha de  $-3/2$  y otro a la izquierda, con esta información basta para construir todo el gráfico, porque estará formado por la unión de dos semirrectas, con origen en  $(-3/2, -5/2)$ , que pueden construirse a partir de esos dos puntos.

Ya sabíamos que  $(0, -4)$  esta sobre el gráfico de  $f$ . Un punto a la izquierda de  $-3/2$  es

$$(-3, f(-3)) = (-3, -3 - 1 - |2 \times (-3) + 3|) = (-3, -7).$$

Si ubicamos estos puntos en el plano  $(x, y)$  obtenemos un esquema como el que aparece en la figura 5, donde hemos destacado especialmente  $(-3/2, -5/2)$  porque es el punto en el que cambia de signo la expresión afectada por el valor absoluto y es el punto más interesante para nuestro análisis. Dibujando ahora las dos semirrectas con origen  $(-3/2, -5/2)$  que quedan

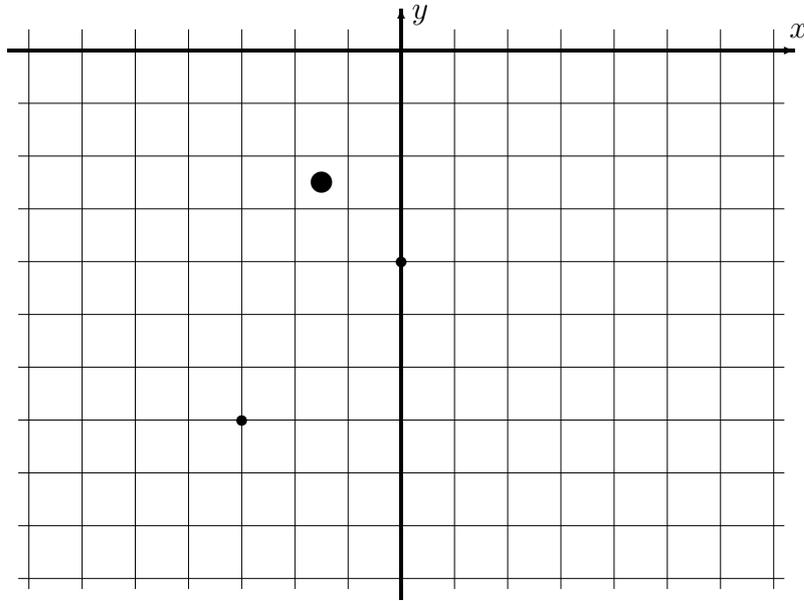


Figura 5: Tres puntos del gráfico de  $x - 1 - |2x + 3|$ .

determinadas por los puntos que acabamos de hallar, recuperamos todo el gráfico de  $f$ . De este modo recuperamos el gráfico que aparece en la figura 4.

Observemos que por este procedimiento construimos el gráfico de  $f$  con total precisión, haciendo sólo tres evaluaciones de función. Una de estas evaluaciones es especialmente sencilla, porque hay que hacerla justamente donde la parte con el valor absoluto se anula. Las otras pueden elegirse a nuestra conveniencia.

El procedimiento funciona para cualquier función  $g$  que sea de la forma

$$g(x) = ax + b \pm |cx + d|,$$

porque al “sacar” las barras del valor absoluto aparecen a cada lado del punto  $x = -d/c$ , donde la expresión lineal afectada por el valor absoluto cambia de signo, sendas funciones lineales.

**Ejercicio 4** Construir el gráfico de

$$f(x) = 2x - 1 - \left|1 - \frac{x}{2}\right|.$$

Hacerlo por dos procedimientos:

1. hallando funciones lineales adecuados e identificando en qué intervalos coinciden con  $f$ ;
2. usando las ideas de la observacion 3

**Ejercicio 5** Construir el gráfico de

$$f(x) = x + |2x - 1| - |5 - 3x|$$

Hacerlo por dos procedimientos:

1. hallando funciones lineales adecuadas e identificando en qué intervalos coinciden con  $f$ ;
2. haciendo una adaptación adecuada de las ideas de la observacion 3. Sugerencia: para graficar la función de este ejercicio harán falta ahora al menos cuatro evaluaciones.

**Observación 4** ALGUNAS RAZONES PARA TRABAJAR CON LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO.

La función valor absoluto es una función sencilla que tiene interés por su significado geométrico, sus propiedades y sus aplicaciones. Notemos que el valor absoluto de un número es la distancia que lo separa del origen. Si tenemos en cuenta que en muchas aplicaciones los signos de los números simplemente expresan convenciones irrelevantes acerca de la orientación de los ejes coordenados (por ejemplo, estar a  $-10$  metros sobre el nivel del mar significa que estamos hundidos), el valor absoluto de un número puede verse como una medida de su tamaño. Como en muchos contextos el tamaño sí importa, suele ser un dato interesante.

El cálculo del valor absoluto de  $x$  puede verse como el procedimiento de considerar  $x$  y  $-x$  y quedarse con el más grande de los dos. Es entonces un modelo de la operación de tomar la más grande entre dos posibilidades, que tiene interés en muchas situaciones. En particular, en el dimensionamiento de estructuras que pueden estar sometidas a más de un régimen de cargas, es recomendable diseñar todas sus componentes para que resistan la más grande de las sollicitaciones que pueden recibir en las diferentes situaciones.

El valor absoluto aparece en diversas aplicaciones. Por ejemplo, la posición de una partícula que sufre un rebote perfectamente elástico puede describirse perfectamente en términos del valor absoluto. Otras funciones lineales a trozos aparecen naturalmente en diversos problemas, como el de calcular la imposición de un sistema fiscal como el del IRPF, con tasas variables por franjas o el costo de un servicio que tiene una tasa básica y luego un precio por unidad consumida.

El valor absoluto es también el ejemplo más sencillo de función que es continua en todos sus puntos, pero no es derivable en todos sus puntos. Aunque no es nuestra intención concentrarnos en este momento en la diferenciabilidad de las funciones, vale la pena recordarlo.

En el marco de nuestro curso, el valor absoluto nos permite construir una familia interesante de funciones, relevante para algunas aplicaciones, con la que trabajar acerca de conceptos fundamentales del cálculo integral, sin necesidad de abordar la complejidad técnica de determinar áreas de regiones del plano con bordes curvos.