Cátedra de Matemática | Facultad de Arquitectura
Universidad de la República

Matemática **2013 – Primer semestre**

Hoja 1: Áreas en el plano. Integral de funciones constantes

Ejercicio 1 Hallar el área encerrada en la región de la figura 1.

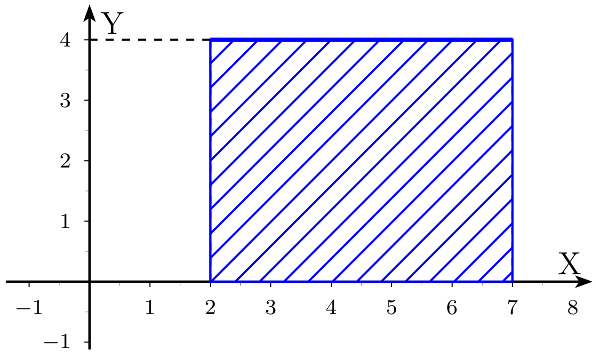

Figura 1

Ejercicio 2 Hallar el área encerrada en la región de la figura 2.

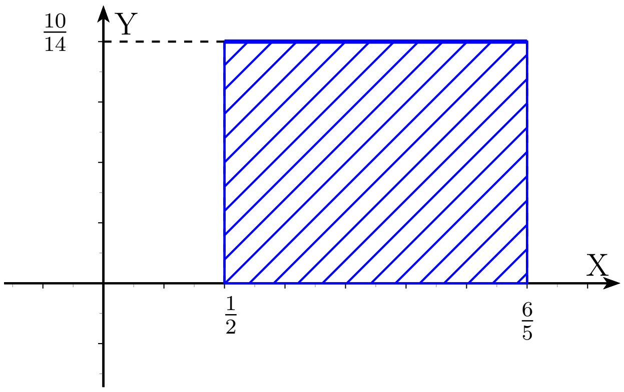

Figura 2

Ejercicio 3 Hallar el valor de x para que el área encerrada en la región de la figura 3 tome el valor 4.

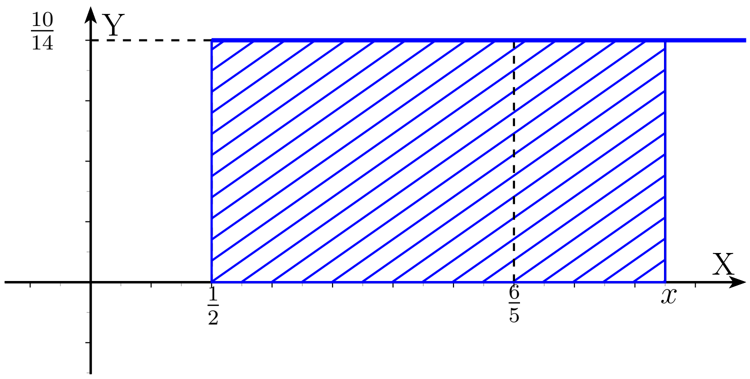

Figura 3

Ejercicio 4 Suponiendo que a y k son conocidos, hallar el valor de $x \geq a$ para que el área encerrada en la región de la figura 4 tome el valor A.

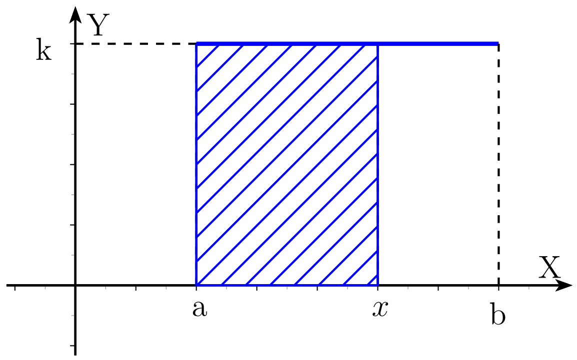

Figura 4

Ejercicio 5 Hallar el área encerrada en la región de la figura 5, para los siguientes valores de x:

1. $x = 1, 1.5, 1.7, 2$

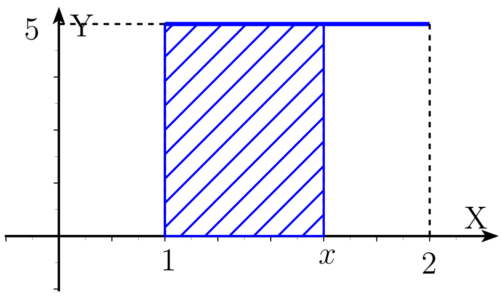

Figura 5

2. $x = 1, 1.5, 1.7, 2$ para la figura 6

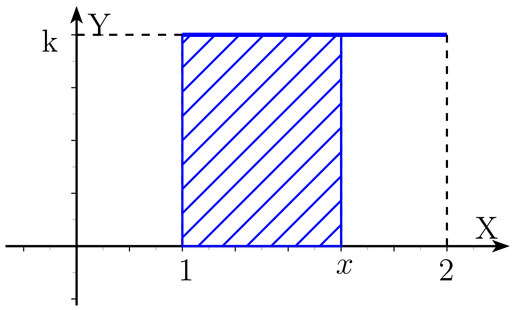

Figura 6

3. Hallar el área para un valor de x genérico, de la figura 7 con $x \geq 0$

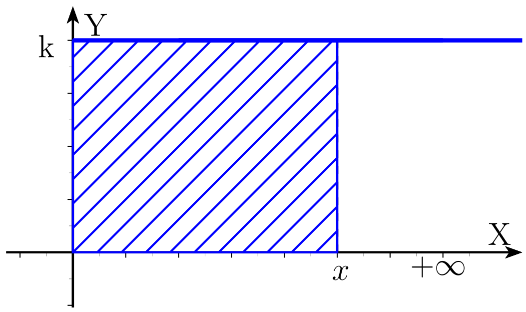

Figura 7

Ejercicio 6 Para la imagen de la figura, hallar una fórmula para $A(x)$ para $x \geq a$. ¿Qué ocurre con esta fórmula para $x < a$? Dibujar el gráfico de A sobre el intervalo $[a, +\infty)$. Repetir esto para una función B que represente el área encerrado bajo el gráfico entre b y x, para $x \geq b$.

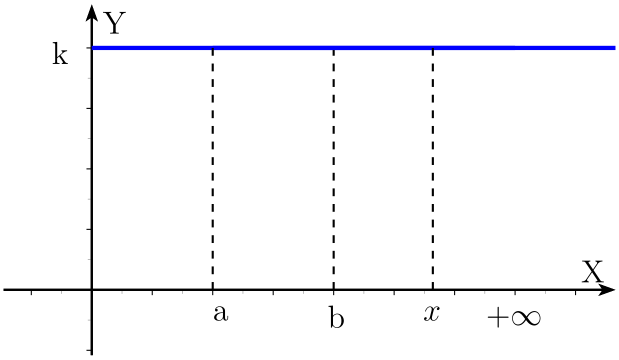

Figura 8

Ejercicio 7 La viga de la figura 9 de 2m de longitud, soporta una carga uniformemente distribuida de 300 daN/m.

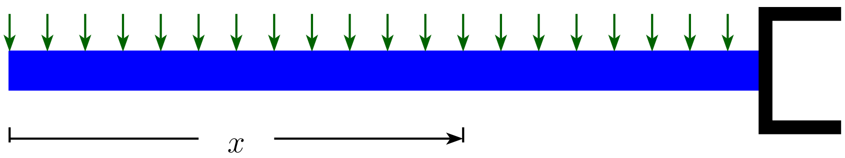

Figura 9

1. Graficar la densidad de carga en función del punto de la viga.
2. Calcular la carga total que soporta la viga.
3. Calcular la carga que soporta la viga entre el extremo de la izquierda y su punto medio.
4. Para cada punto de la vida, que identificaremos por la distancia x a la que está del extremo izquierdo de la viga, calcular la carga que soporta la viga entre su extremo ($x = 0$), y el valor de x considerado. Verificar que la fórmula encontrada predice correctamente los resultados de las partes 2 y 3. NOTA: este valor recibe el nombre de *cortante* en x, y es habitual designarlo con $V(x)$. El cortante $V(x)$ es la componente vertical de fuerza que la parte de la viga que está entre su extremo y el punto x descarga sobre la parte de la viga que está a la derecha de x. ¿Por qué es cierta esta afirmación?
5. Graficar el cortante $V(x)$.

Ejercicio 8 Una casa está equipada con un lavarropas y un calefón, que tiene potencias de 2200 W y 2000 W respectivamente.

1. Si en un día típico el calefón se prende de 9 a 12 y de 19 a 21 hs:
   (a) Grafique la potencia requerida por el calefón, para un día entero.
   (b) ¿Cuánta energía consume (en Wh) el calefón al cabo del día?
   (c) Calcule el consumo generado por el calefón, desde las 0 hs hasta las x hs con $x = 5, 10, 15, 20$
2. Si además el lavarropas funciona entre las 11 horas y las 13 horas, responda las mismas preguntas de la parte anterior, para los consumos generados por ambos electrodomésticos.
3. La casa no se abastece con energía de UTE, sino que tiene un panel solar, que genera 2100 W de 9 a 17hs. Esta energía generada se almacena en baterías para su uso posterior. ¿Es suficiente la energía generada para mantener en funcionamiento los dos aparatos en los horarios descriptos anteriormente? Responda las mismas preguntas que para el caso anterior incorporando ahora el panel solar.

Ejercicio 9 Hallar una fórmula para

$$\int_a^b c dx$$

en términos de a, b y c.

Ejercicio 10 Mostrar que para valores cualesquiera de $a \leq b$ y c se satisface

$$\int_a^b (-c) dx = - \int_a^b c dx.$$

Hacerlo de dos maneras: a partir de la defínción de integral y de la fórmula encontrada en el ejercicio 9.

Ejercicio 11 Mostrar que para valores cualesquiera de a y c se satisface

$$\int_a^a c dx = 0.$$

Hacerlo de dos maneras: a partir de la defínción de integral y de la fórmula encontrada en el ejercicio 9.

Ejercicio 12 Mostrar que para valores cualesquiera de k y $a \leq b \leq c$ se satisface

$$\int_a^c k dx = \int_a^b k dx + \int_b^c k dx. \tag{1}$$

Hacerlo de dos maneras: a partir de la definición de integral y de la fórmula encontrada en el ejercicio 9.

Para el próximo ejercicio conviene recordar que la definición de

$$\int_b^c k dx$$

cuando $b > c$ se hace para que la fórmula (1) siga teniendo validez incluso cuando no se satisface $b \leq c$.

Ejercicio 13 Calcular

$$\int_3^1 (-1)dx.$$

Ejercicio 14 Un móvil se desplaza sobre el eje x con velocidad -10 m/s. En el instante $t = 0$ está en el origen $x = 0$.

1. Calcular

$$\int_0^{-5} (-10)dt$$

   e interpretar el resultado en términos de esta imagen física.

2. Para cualquier valor de $t \in \mathbb{R}$, calcular

$$\int_0^{t} (-10)dt.$$

   Relacionar el resultado con el problema físico de un móvil con velocidad -10 m/s. ¿Qué significado tiene lo que se observa para valores negativos de t?

Ejercicio 15 Mostrar que la igualdad

$$\int_a^c kdx = \int_a^b kdx + \int_b^c kdx.$$

se satisface para valores cualesquiera de a, b y c, sin importar en qué orden estén.

Ejercicio 16 Durante un buen rato de lluvia torrencial, el agua cae a razón de 1 mm por minuto. El techo de la casa de la figura 10 mide $8m \times 8m$, y tiene una inclinación de 10 grados respecto a la horizontal. El caudal en la sección x es el número de litros por segundo (l/s) que pasa por esa sección. Calcule el caudal en función de x.

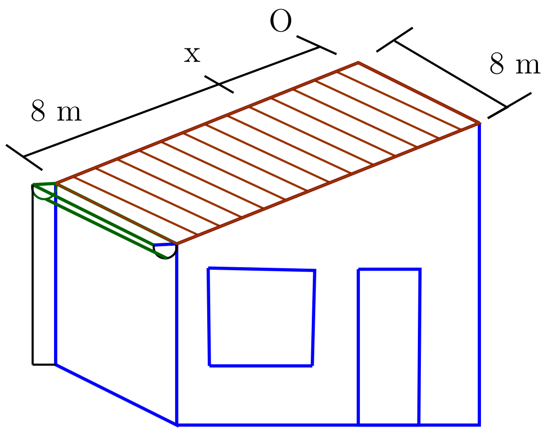

Figura 10

Al final del techo una canaleta recoge toda el agua. Calcule el caudal de agua que, bajo esta lluvia, debe estar pasando por el extremo inferior de la canaleta, suponiendo que la canaleta no desborda.

Ejercicio 17 Para la función f cuyo gráfico se representa en la figura calcular la integral entre 0 y x, con $x = 2, 4, 6$.

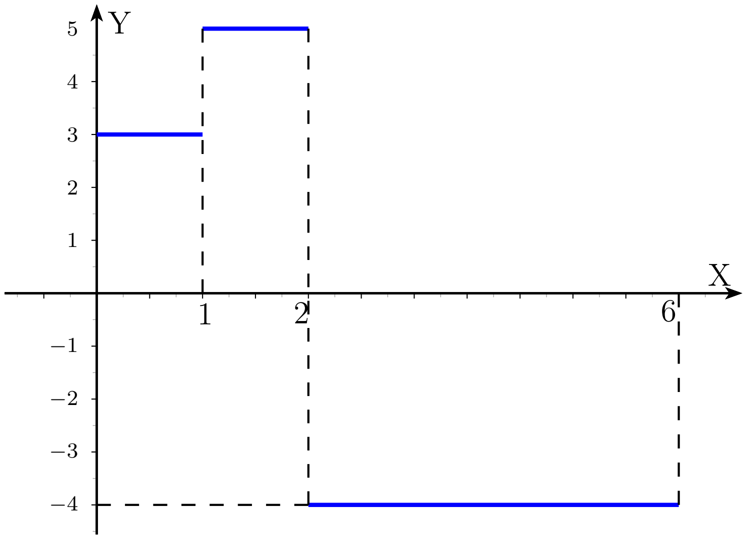

Figura 11

Ejercicio 18 Sea $F(x) = \int_0^x f(x)$, donde f es la función del ejercicio anterior. Hallar todos los valores de x en que $F(x)$ toma el valor 3. Repetir para 6 y -24.

Ejercicio 19 En el instante $t = 0$ una partícula que venía viajando desde la parte positiva del eje x con velocidad -1 m/s tiene un choque perfectamente elástico con un obstáculo que se encuentra en el origen $x = 0$ y sale rebotada con velocidad 1 m/s. Representar gráficamente la velocidad en función del tiempo, en los intervalos en que esta velocidad esté definida. Calcular la posición $x(t)$ que la partícula ocupa en el tiempo t. Graficar la posición x en función del tiempo.