Cátedra de Matemática

Facultad de Arquitectura
Universidad de la República

Matemática **2013 – Primer semestre**

Valor absoluto y otras funciones lineales a trozos

Versión: 09/04/2013

Resumen

Los propósitos de este material son:

1. repasar la noción de *valor absoluto* y la función real asociada con ella;
2. discutir cómo graficar algunas funciones definidas por fórmulas en las que aparecen valores absolutos de expresiones lineales.

Los requisitos previos para la lectura son cierta familiaridad con las funciones lineales definidas por fórmulas de la forma

$$f(x) = ax + b,$$

donde a y b pueden ser constantes cualesquiera, y sus gráficos en el plano (x, y).

El *valor absoluto* de un número cada $x \in \mathbb{R}$ se indica por el símbolo $|x|$, y está definido por

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ejemplo 1 El valor absoluto de 3 es $|3| = 3$. El valor absoluto de -1 es $|-1| = -(-1) = 1$.

Observación 1 Podría objetarse a la fórmula (1) que parece dar dos definiciones diferentes del valor absoluto para $x = 0$, que sería preferible escribir

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Como $0 = -0$, cualquiera de las dos expresiones coincide en asignar el valor 0 a $|0|$, por lo que no se genera ninguna contradicción. Preferimos (1) porque nos recuerda que $|x|$ coincide con $-x$ cuando $x \leq 0$, y con x cuando $x \geq 0$. En $x = 0$ simplemente ocurre que x, $-x$ y $|x|$ toman el mismo valor. ♠

Para calcular el valor absoluto de expresiones más complejas, como, por ejemplo

$$\left| \frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16} \right|$$

operamos de la manera habitual con los números afectados por la barra de valor absoluto:

$$\left| \frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16} \right| = \left| \frac{3}{4} - \frac{35}{16} \right| = \left| \frac{12}{16} - \frac{35}{16} \right| = \left| -\frac{23}{16} \right|.$$

Por último, tomamos la decisión que corresponda, dependiendo del signo que tenga el resultado de las operaciones anteriores. En este caso es negativo, por lo tanto

$$\left|\frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16}\right| = \left|-\frac{23}{16}\right| = -\left(-\frac{23}{16}\right) = \frac{23}{16}.$$

Cuando todo es tan explícito como en este ejemplo, el último paso de tomar el opuesto de un número negativo resulta bastante obvio, por lo que es corriente escribir simplemente

$$\left|\frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{16}\right| = \left|-\frac{23}{16}\right| = \frac{23}{16}.$$

La última igualdad aparece a la vista como "sacar" las barras de valor absoluto, pero en realidad lo que se está haciendo es aplicar la definición de esta función.

Ejercicio 1 Calcular

$$-\frac{5}{3} - 1 - \left|2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 3\right|.$$

1. La función valor absoluto y su gráfico

Tal como indica la fórmula (1), el valor absoluto puede calcularse para cualquier número real x y produce un nuevo número real $|x|$. De modo que esta operación define una función real de variable real. Ampliando un poco el uso de la expresión valor absoluto, llamaremos a esta función la función *valor absoluto*[1].

Para graficar el valor absoluto recurrimos a la definición. Sabemos que

$$|x| = x, \quad x \geq 0; \qquad |x| = -x, \quad x \leq 0.$$

Los gráficos de x y $-x$ son sencillos.

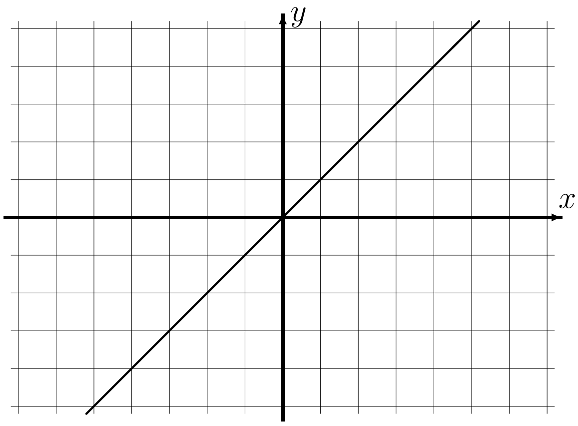
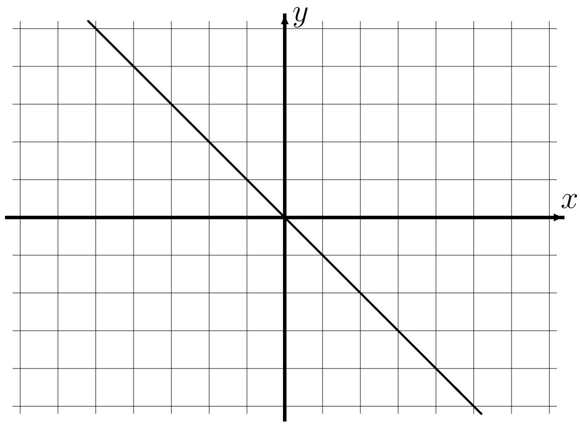


Gráfico de x.



Gráfíco de $-x$.

[1]Es habitual designar con el símbolo $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales. Con esta notación, el procedimiento de calcular el valor absoluto de cada número genera una función que indicamos así: $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Además de tener presente en qué dominio actúa, es sugerente escribir también lo que la función hace, algo que podemos representar de la siguiente manera: $|\cdot| : x \mapsto |x|$. Todavía puede asociarse con la función otro esquema que de algún modo resume los dos anteriores: $|\cdot| : x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$. Además de explicitar lo que hace la función $|\cdot|$, esta última representacion explicita que x y $|x|$ pertenecen al conjunto de los números reales.

Recomendamos manejar este tipo de expresiones para una función sólo si son de ayuda. Lo único que hacen es codificar en una única línea la misma información que hemos puesto en el primer párrafo de esta sección. Esta síntesis es muy útil para la persona entrenada en el uso de estos símbolos, pero puede ser un estorbo para quien se está iniciando en esta área, por lo que más bien tenderemos a evitarlas. Quien se sienta cómodo con este tipo de notación puede usarla libremente.

Naturalmente, del primero de ellos sólo nos interesa la información para $x \geq 0$, que es la región en que $|x|$ coincide con x. Del segundo, la información para $x \leq 0$. Combinando ambas podemos construir el gráfico de la función valor absoluto.

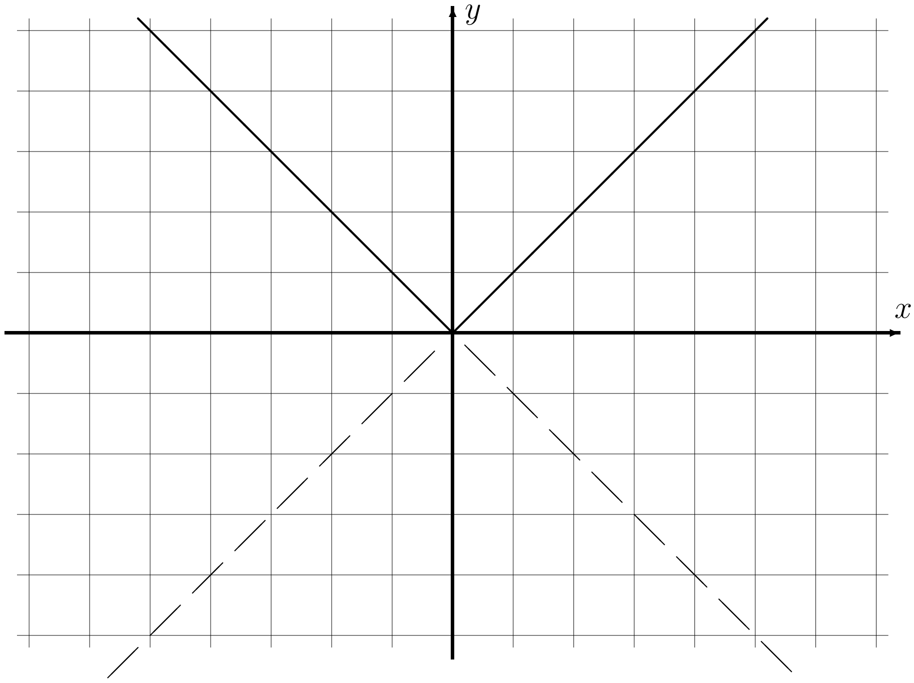


Figura 1: Gráfico de valor absoluto superpuesto a los dos gráficos auxiliares de x y $-x$.

El resultado se muestra en la figura 1. Las partes de los gráficos de x y $-x$ que no guardan relación con el valor absoluto, aparecen con trazo discontinuo. Corresponden a intervalos donde es otra la fórmula que define al valor absoluto.

Una verificación de que el dibujo es correcto puede hacerse ubicando en el gráfico algunos puntos concretos. No es cien por ciento segura, porque bien podría haber un error en otra parte, pero aun así es conveniente hacerla.

Con el origen y otros dos puntos bien escogidos es suficiente, porque la gráfica del valor absoluto es lineal a trozos y no exhibe puntos de discontinuidad. El punto $(0, 0)$ del plano (x, y) está en el gráfico de valor absoluto, porque $|0| = 0$. Para $x = 1$ se tiene $|x| = 1$, lo que da lugar al punto $(1, 1)$ en el gráfico. El valor absoluto de $x = -3$ es $|x| = 3$. Por lo tanto $(-3, 3)$ también está en el gráfico. Estos tres puntos, destacados sobre una gráfica del valor absoluto –ya sin líneas auxiliareas y dibujada de un modo que enfatiza los valores positivos del eje vertical–, aparecen en la figura 2.

2. Valores absolutos y funciones lineales

El objetivo de esta sección es estudiar los gráficos de funciones que son combinaciones lineales de funciones lineales y valores absolutos de funciones lineales. En vez de perdernos en este trabalenguas, discutiremos un ejemplo.

Ejemplo 2 Vamos a construir una representación gráfica de la función

$$f(x) = x - 1 - |2x + 3|. \tag{2}$$

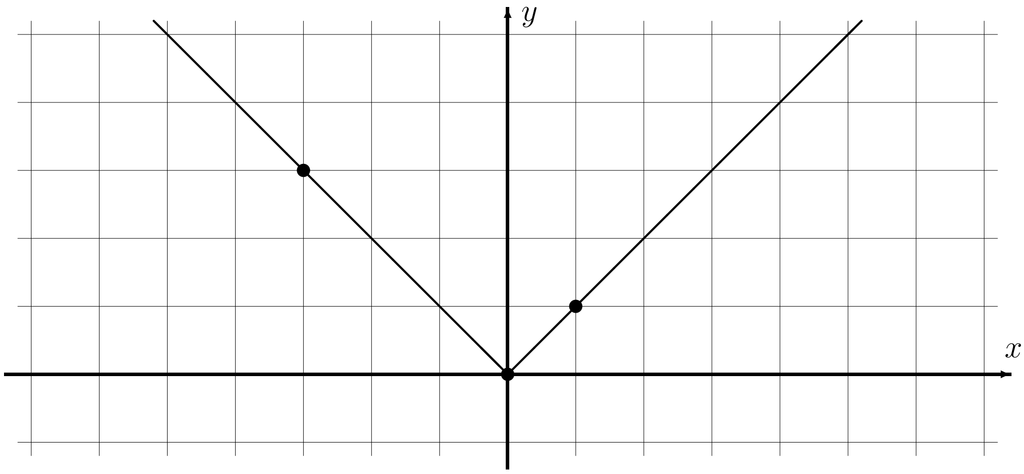


Figura 2: Gráfico de valor absoluto con $(-3, 3)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Recordemos que el gráfico es la representación de todos los puntos $(x, f(x))$. Podemos conseguir algunos de ellos simplemente evaluando en algunos lugares. Por ejemplo,

$$f(0) = 0 - 1 - |2 \times 0 + 3| = -4.$$

El punto $(0, -4)$ tiene que estar en el gráfico de f. La elección de este punto fue bastante arbitraria. Podemos repetir el procedimiento para cualquier otro. A modo de ejercicio proponemos al lector otras dos elecciones de entre una infinidad de posibilidades.

Ejercicio 2 Ubicar en el plano (x, y) los puntos del gráfico de f que corresponden a $x = -5$ y $x = 5$.

Conseguir el gráfico ubicando muchos puntos es un procedimiento que puede dar resultado cuando se hace con una computadora, que es capaz de calcular miles de puntos en muy poco tiempo. Es una opción. Pero mostraremos a continuación cómo resolver la tarea sin programar. Antes de seguir avanzando subrayemos que hay un punto específico que sí conviene calcular: es el que corresponde al valor de x en que cambia de signo la expresión afectada por el valor absoluto. En nuestro ejemplo, dentro del valor absoluto aparece

$$2x + 3,$$

que se anula en

$$x = -\frac{3}{2}.$$

Allí $2x + 3$ pasa de negativa a positiva. Evaluamos f en ese punto y obtenemos

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} - 1 - \left|2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 3\right| = -\frac{5}{2}. \tag{3}$$

Acabamos de ubicar un nuevo punto que podemos poner en el gráfico. Veremos luego que este punto es realmente importante, pero ahora tomaremos una dirección ligeramente diferente.

La expresión $|2x + 3|$ es igual a $-(2x + 3)$ o a $2x + 3$, dependiendo de que $2x + 3$ sea, respectivamente, menor o igual que cero o mayor o igual que cero. Tenemos entonces

$$|2x + 3| = \begin{cases} -2x - 3, & x \leq -3/2; \\ 2x + 3, & x \geq 3/2. \end{cases}$$

Usando esta información en la definición de la función f obtenemos

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 - (-2x - 3) & = & 3x + 2, & x \leq -3/2; \\ x - 1 - (2x + 3) & = & -x - 4, & x \geq -3/2. \end{cases}$$

Vemos que tanto para $x \leq -3/2$ como para $x \geq -3/2$, los valores que toma la función f pueden calcularse por medio de expresiones lineales relativamente simples. La única dificultad es que hay que pasar de una expresión a la otra al pasar de un lado a otro de $-3/2$.

Al evaluar $3x + 2$ en $x = -3/2$ obtenemos el valor

$$3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 2 = -\frac{5}{2}.$$

El mismo cálculo $-x - 4$ arroja

$$-\left(-\frac{3}{2}\right) - 4 = -\frac{5}{2}.$$

Como era de esperar, ambas expresiones devuelven el valor de la función, que ya habíamos calculado en (3).

Observación 2 El cálculo de $f(-3/2)$ es redundante y puede parecer innecesario. Sin embargo reiteremos la idea de que tiene valor importante como verificación. Notemos además que la evaluación de f en ese punto se vuelve especialmente sencilla, porque la parte en la que aparece el valor absoluto se anula. En la observación 3 volveremos sobre el interés que para este ejemplo específico tiene calcular el valor de f en este punto. ♠

Dado que para $x \leq -3/2$ los valores funcionales de f coinciden con los de $3x + 2$, el gráfico de f sobre ese intervalo coincide con el de la función lineal $3x + 2$. El mismo razonamiento permite concluir que el gráfico de f coincide con el de $-x - 4$ para $x \geq -3/2$. En la figura 3 aparecen los gráficos de estas dos funciones lineales.

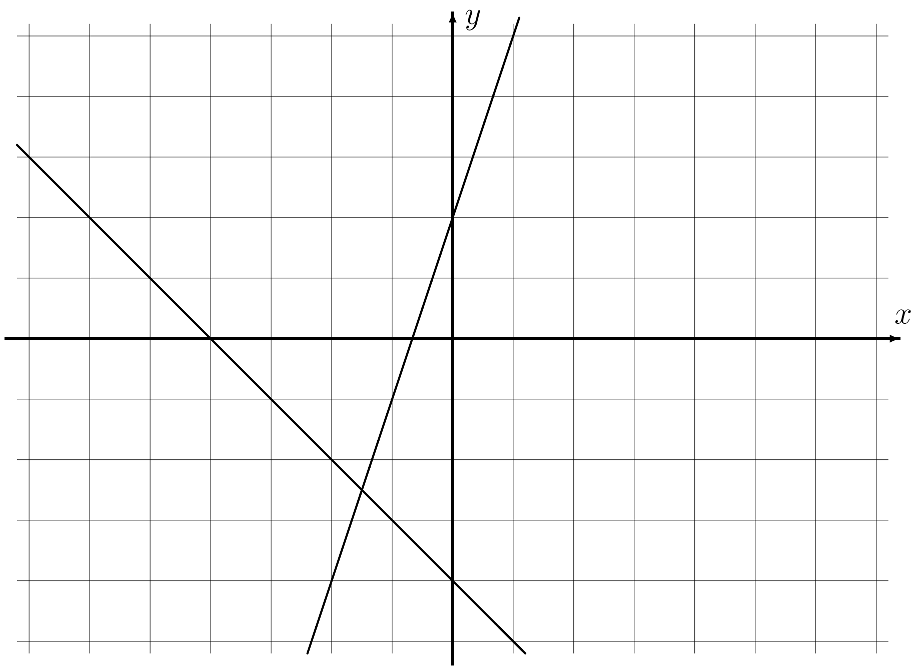


Figura 3: Gráficos auxiliares para el gráfico de $x - 1 - |2x + 3|$.

Identificando correctamente qué parte de cada recta es relevante para el gráfico de f, podemos construir su gráfico a partir de la figura 3. Recordemos que a la izquierda de $x = -3/2$, que es la abcisa del punto de corte de las dos rectas oblicuas en la figura 3, los valores de la función f coinciden con los de $3x+2$, por lo que es la parte que cae a la izquierda de $x = -3/2$ lo que nos interesa conservar del gráfico de esta función. Es decir, los puntos (x, y) que cumplen las condiciones

$$y = 3x + 2, \quad x \leq -\frac{3}{2}.$$

Para $x \geq -3/2$ conservamos los puntos que corresponden al gráfico de $-x-4$. O sea, los puntos de la forma

$$y = -x - 4, \quad x \geq -\frac{3}{2}.$$

El resultado se muestra en la figura 4. Todo el gráfico de f cae en el semiplano $y \leq 0$, que hemos enfatizado en ese dibujo.

Para cerrar esta parte del cálculo, verificaremos que que los puntos $(-3/2, -5/2)$ y $(0, -4)$ están en el gráfico de f. Lo explicitamos destacándolos en la figura 4.

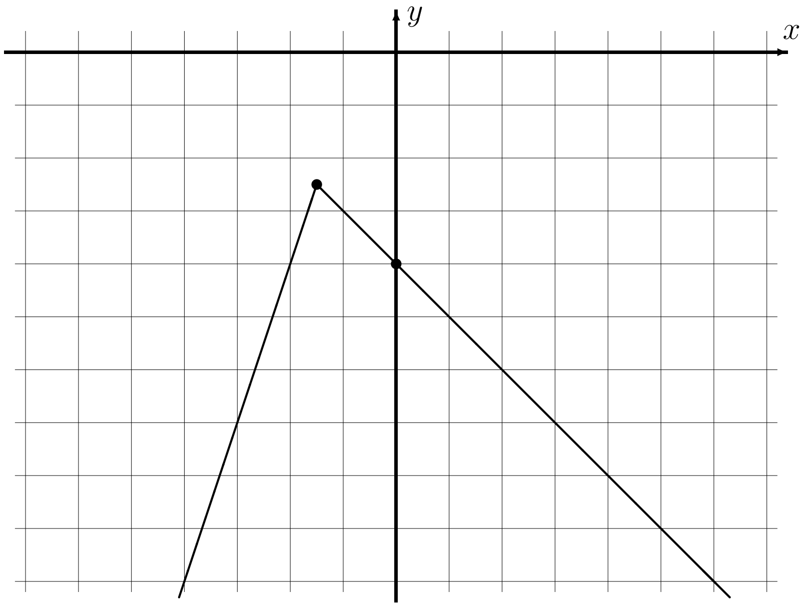


Figura 4: Gráfico de $x - 1 - |2x + 3|$ con puntos destacados

Ejercicio 3 Verificar que los puntos encontrados en el ejercicio 2, están en el gráfico de f.

Observación 3 El gráfico de f es lineal a trozos. Es un gráfico continuo que sobre un intervalo coincide con el de una función lineal y sobre otro intervalo con el de otra función lineal. Se pasa de una función lineal a la otra en $x = -3/2$, que da lugar al punto $(-3/2, -5/2)$ sobre el gráfico de f. Si podemos ubicar un punto del gráfico de f que esté a la derecha de $-3/2$ y otro a la izquierda, con esta información basta para construir todo el gráfico, porque estará formado por la unión de dos semirrectas, con origen en $(-3/2, -5/2)$, que pueden construirse a partir de esos dos puntos.

Ya sabíamos que $(0, -4)$ esta sobre el gráfico de f. Un punto a la izquierda de $-3/2$ es

$$(-3, f(-3)) = (-3, -3 - 1 - |2 \times (-3) + 3|) = (-3, -7).$$

Si ubicamos estos puntos en el plano (x, y) obtenemos un esquema como el que aparece en la figura 5, donde hemos destacado especialmente $(-3/2, -5/2)$ porque es el punto en el que cambia de signo la expresión afectada por el valor absoluto y es el punto más interesante para nuestro análisis. Dibujando ahora las dos semirrectas con origen $(-3/2, -5/2)$ que quedan

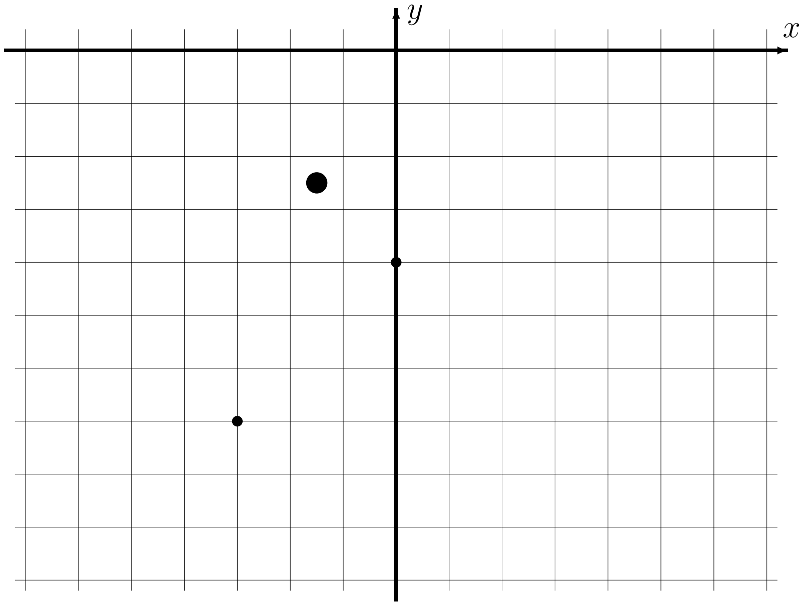


Figura 5: Los puntos $(-3/2, -5/2)$, $(-3, -7)$ y $(0, -4)$ del gráfico de $x - 1 - |2x + 3|$.

determinadas por los puntos que acabamos de hallar, construimos todo el gráfico de f. De este modo recuperamos el gráfico que aparece en la figura 4.

Observemos que con este nuevo procedimiento hemos encontrado el gráfico de f haciendo sólo tres evaluaciones de función. Una de estas evaluaciones es especialmente sencilla, porque hay que hacerla justamente donde la parte con el valor absoluto se anula. Las otras pueden elegirse a nuestra conveniencia.

El procedimiento funciona para cualquier función g que sea de la forma

$$g(x) = ax + b \pm |cx + d|,$$

porque al "sacar" las barras del valor absoluto, a cada lado del punto $x = -d/c$, donde la expresión lineal afectada por el valor absoluto cambia de signo, aparecen sendas funciones lineales. ♠

Ejercicio 4 Construir el gráfico de

$$f(x) = 2x - 1 - \left|1 - \frac{x}{2}\right|.$$

Hacerlo por dos procedimientos:

1. hallando funciones lineales adecuados e identificando en qué intervalos coinciden con f;
2. usando las ideas de la observacion 3.

Ejercicio 5 Construir el gráfico de

$$f(x) = x + |2x - 1| - |5 - 3x|$$

Hacerlo por dos procedimientos:

1. hallando funciones lineales adecuadas e identificando en qué intervalos coinciden con f;
2. haciendo una adaptación adecuada de las ideas de la observacion 3. Sugerencia: para graficar la función de este ejercicio harán falta ahora al menos cuatro evaluaciones.

Observación 4 ALGUNAS RAZONES PARA TRABAJAR CON LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO. La función valor absoluto es una función sencilla que tiene interés por su significado geométrico, sus propiedades y sus aplicaciones. Notemos que el valor absoluto de un número es la distancia que lo separa del origen. Si tenemos en cuenta que en muchas aplicaciones los signos de los números simplemente expresan convenciones irrelevantes acerca de la orientación de los ejes coordenados (por ejemplo, estar a -10 metros sobre el nivel del mar significa que estamos hundidos), el valor absoluto de un número puede verse como una medida de su tamaño. Como en muchos contextos el tamaño sí importa, suele ser un dato interesante.

El cálculo del valor absoluto de x puede verse como el procedimiento de considerar x y $-x$ y quedarse con el más grande de los dos. Es entonces un módelo de la operación de tomar la más grande entre dos posibildades, que tiene interés en muchas situaciones. En particular, en el dimensionamiento de estructuras que pueden estar sometidas a más de un regimen de cargas, es recomendable diseñar todas sus componentes para que resistan la más grande de las solicitaciones que pueden recibir en las diferentes situaciones.

El valor absoluto aparece en diversas aplicaciones. Por ejemplo, la posición de una partícula que sufre un rebote perfectamente elástico puede describirse perfectamente en términos del valor absoluto. Otras funciones lineales a trozos aparecen naturalmente en diversos problemas, como el de calcular la imposición de un sistema fiscal como el del IRPF, con tasas variables por franjas o el costo de un servicio que tiene una tasa básica y luego un precio por unidad consumida.

El valor absoluto es también el ejemplo más sencillo de función que es continua en todos sus puntos, pero no es derivable en todos sus puntos. Aunque no es nuestra intención concentrarnos en este momento en la diferenciabilidad de las funciones, vale la pena recordarlo.

En el marco de nuestro curso, el valor absoluto nos permite construir una familia interesante de funciones, relevante para algunas aplicaciones, con la que trabajar acerca de conceptos fundamentales del cálculo integral, sin necesidad de abordar la complejidad técnica de determinar áreas de regiones del plano con bordes curvos. ♠